



МГТУ имени Н.Э. Баумана
Студенческая научная весна
Аэрокосмический факультет
май 2020



10. ДИНАМИКА РЕЛЕЙНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ОБРАЩЁННОГО МАЯТНИКА

Автор:

студент гр. АК1-61

Худайбергенов Борислав Рустамович

Руководитель:

к.т.н., доцент каф. СМ-2

Симоньянц Ростислав Петрович

Москва, 2020



Проблема

Проблема стабилизации перевернутого маятника изучена не полно. В окрестности неустойчивого положения равновесия при трёхпозиционном релейном управлении с гистерезисом возможен режим оптимальных по расходу энергии автоколебаний. Представляет интерес задача синтеза параметров регулятора, обеспечивающих реализацию этого режима.

Задача

Изучение динамики релейной стабилизации обращённого маятника в окрестности положения неустойчивого равновесия и исследование возникающих при этом предельных циклов осуществляется применением качественной теории динамических систем на плоскости и методами компьютерного моделирования.



Актуальность проблемы

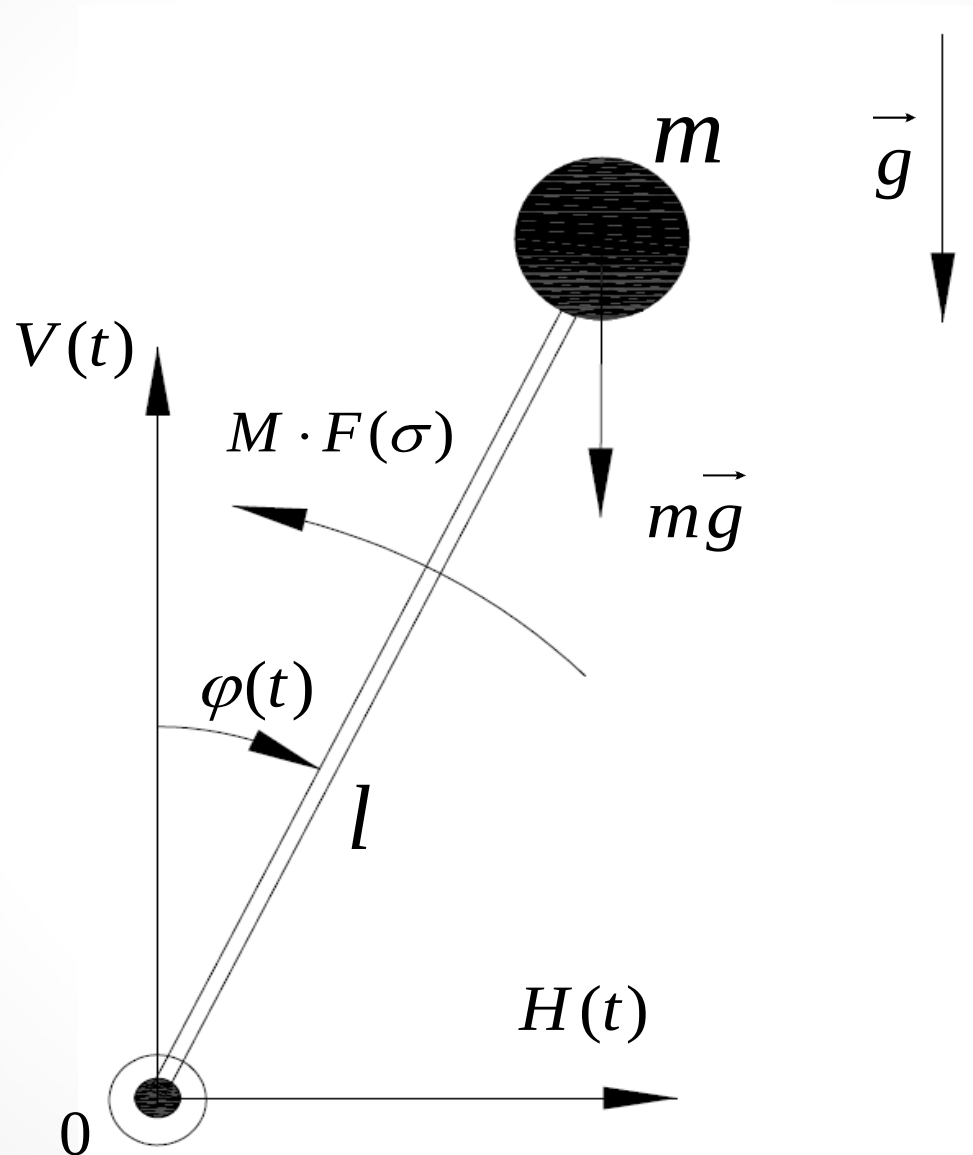
Алгоритм стабилизации объекта «перевернутый маятник» может быть применен в робототехнике при движении роботов гуманоидов [1-2]. С помощью двигателей изменяется угол расположения составных частей робота, что позволяет сохранить его точку равновесия и не дает ему упасть.

Методы исследования

В данной работе применены два метода исследования: метод качественной теории динамических систем на плоскости [3] и, в частности, метод точечных отображений [4]. Для подтверждения аналитических результатов используется метод компьютерного моделирования.



Физическая модель



Математическая модель

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, & \frac{dy}{dt} - \omega^2 x = -a \cdot F_r(\sigma) \\ \sigma = x + k \cdot y, \\ F(\sigma) = \frac{1}{2} [\operatorname{sgn}(\sigma - \alpha + h \cdot F_0) + \operatorname{sgn}(\sigma + \alpha + h \cdot F_0)], \\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \\ a = \frac{M}{J} \end{cases}$$

$$F(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{при } \sigma \geq +\alpha, \\ -1 & \text{при } \sigma \leq -\alpha, \\ 0 & \text{при } -\alpha + h \leq \sigma \leq \alpha - h, \\ F_0(t) = F(t-0) & \text{при } (\alpha - h) < |\sigma(t)| < \alpha. \end{cases}$$

Фазовые траектории:

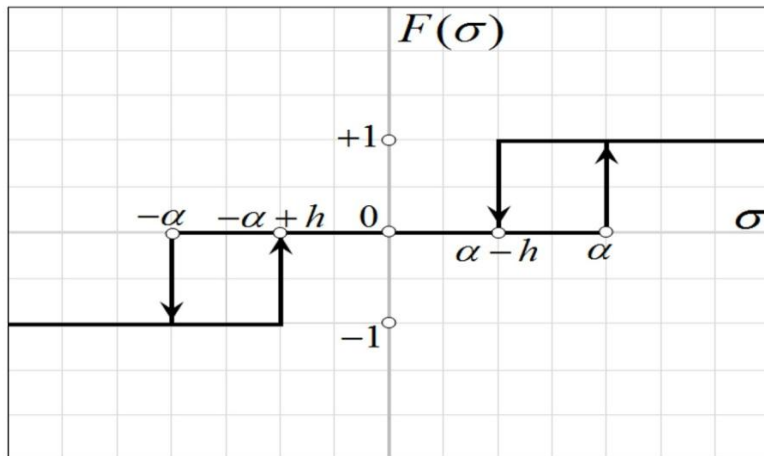
$$\Gamma^F: \frac{y^2}{C_F \omega^2} - \frac{\left(x - \frac{aF(\sigma)}{\omega^2}\right)^2}{C_F} = 1, C_F = \frac{y_0^2}{\omega^2} + \frac{2aF(\sigma)x_0}{\omega^2} - x_0^2 - \left(\frac{aF(\sigma)}{\omega^2}\right)^2$$

или

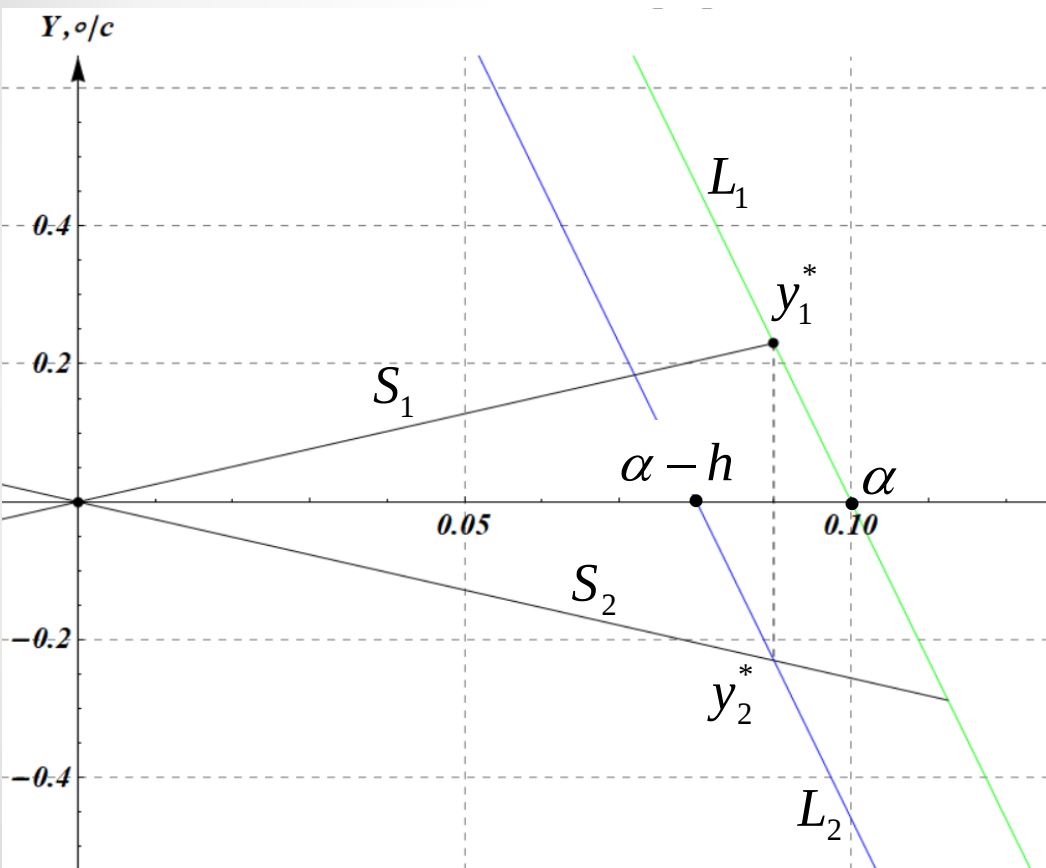
$$\Gamma^+: \frac{y^2}{C_+ \omega^2} - \frac{\left(x - \frac{a}{\omega^2}\right)^2}{C_+} = 1, C_+ = \frac{y_0^2}{\omega^2} + \frac{2ax_0}{\omega^2} - x_0^2 - \left(\frac{a}{\omega^2}\right)^2$$

$$\Gamma^0: \frac{y^2}{C_0 \omega^2} - \frac{x^2}{C_0} = 1, C_0 = \frac{y_0^2}{\omega^2}$$

$$\Gamma^-: \frac{y^2}{C_- \omega^2} - \frac{\left(x + \frac{a}{\omega^2}\right)^2}{C_-} = 1, C_- = \frac{y_0^2}{\omega^2} - \frac{2ax_0}{\omega^2} - x_0^2 - \left(\frac{a}{\omega^2}\right)^2$$



Вывод коэффициента К



$$\begin{cases} y_1^* = S_1 \cap L_1 \\ y_2^* = S_2 \cap L_2 \Rightarrow k^* = \frac{1}{\omega(\frac{2\alpha}{h} - 1)} \\ y_1^* = -y_2^* \end{cases}$$

При $k > k^*$ – одноимпульсный ПЦ

При $k < k^*$ – двухимпульсный ПЦ

При $k = k^*$ – треугольный
одноимпульсный ПЦ

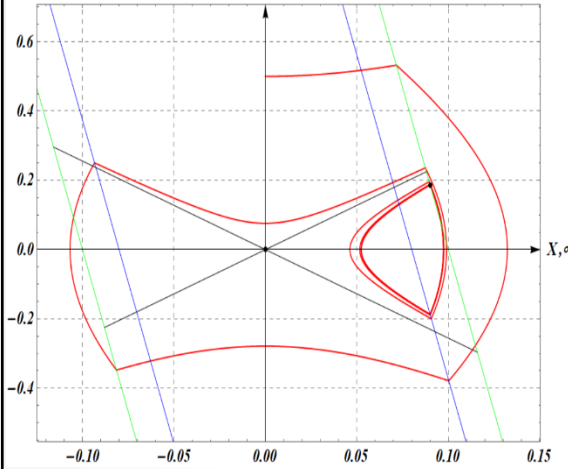


Виды предельных циклов

Фазовая плоскость

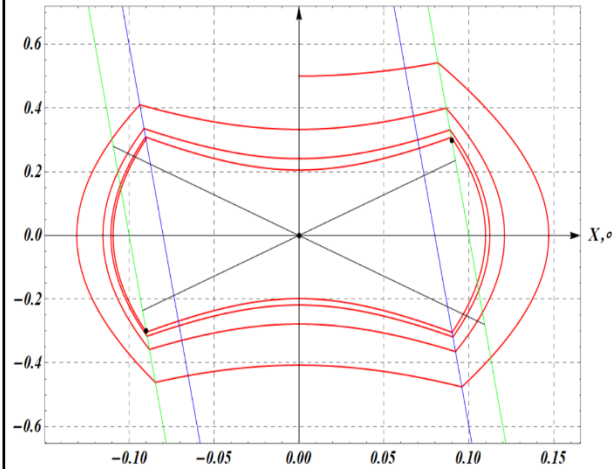
$$k > k^*$$

Фазовый портрет
 $Y, \text{°/с}$



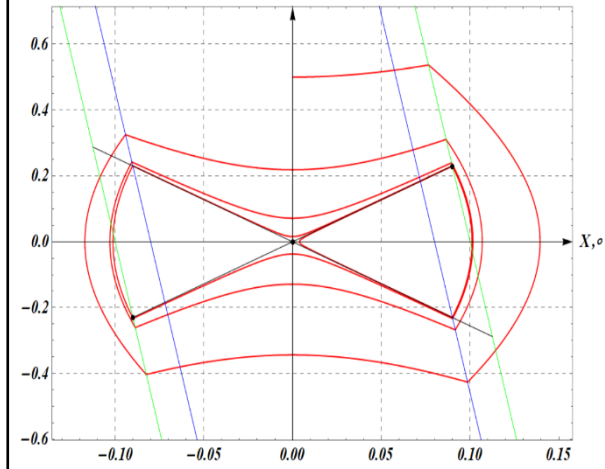
$$k < k^*$$

Фазовый портрет
 $Y, \text{°/с}$



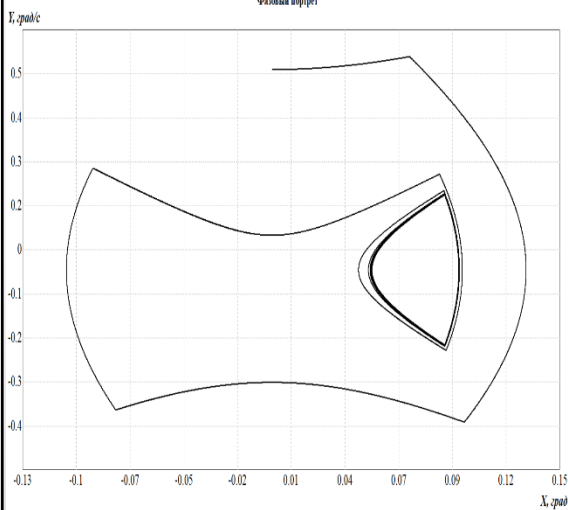
$$k = k^*$$

Фазовый портрет
 $Y, \text{°/с}$

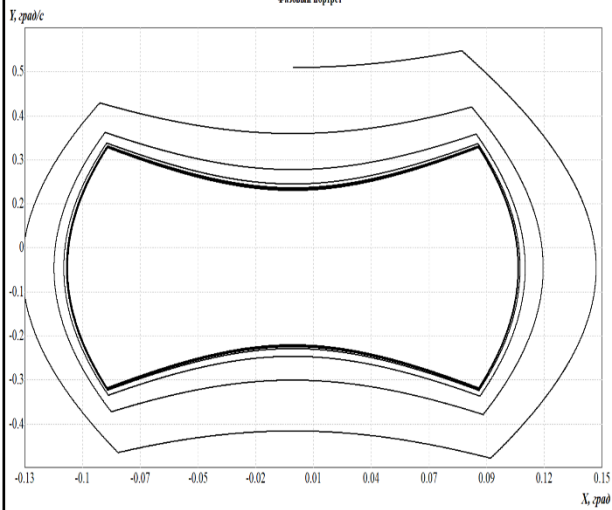


МВТУ

Фазовый портрет



Фазовый портрет



Фазовый портрет

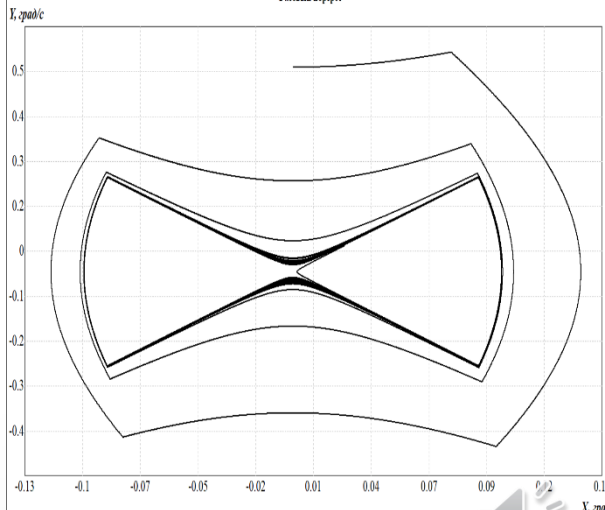
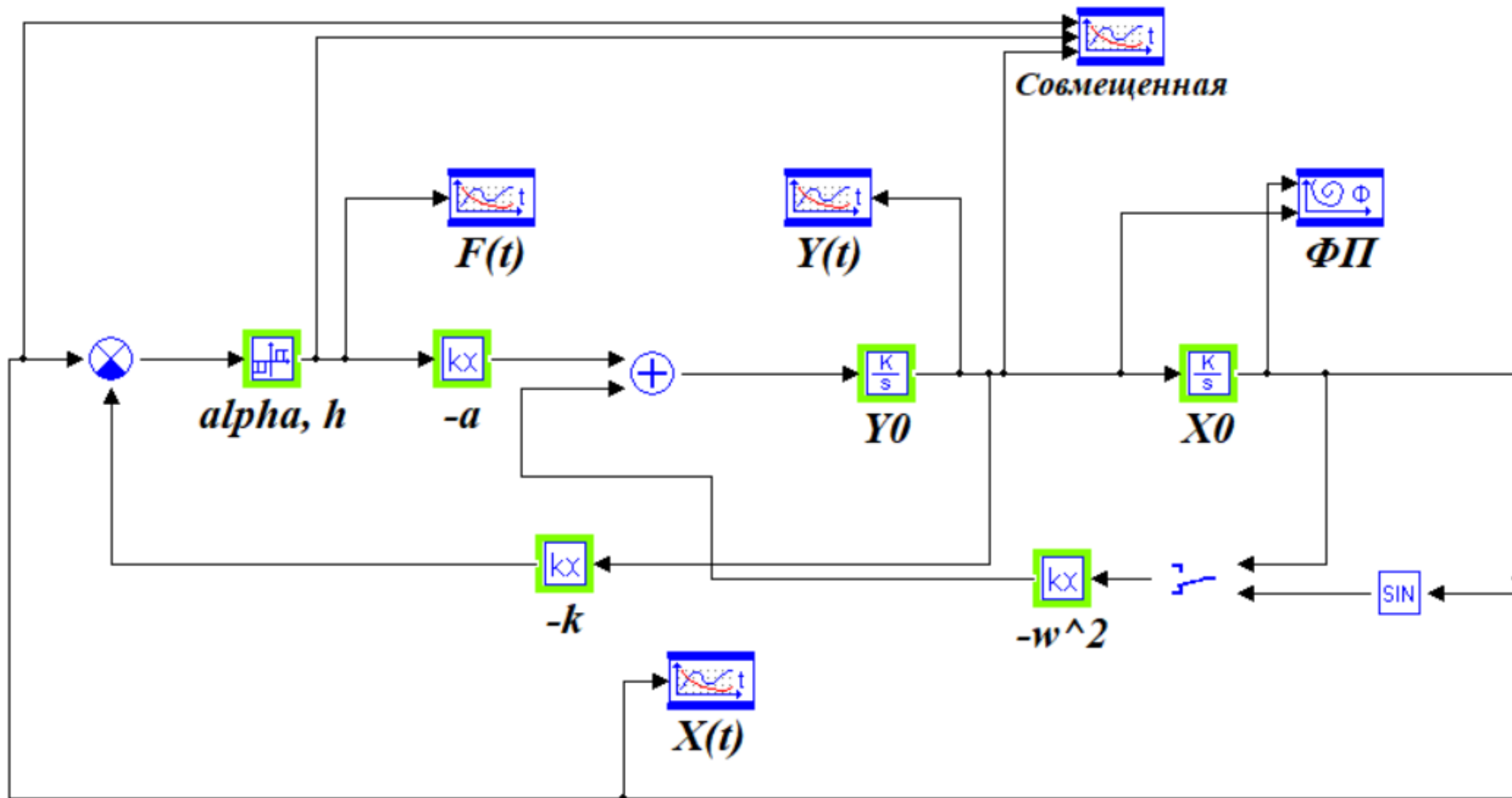
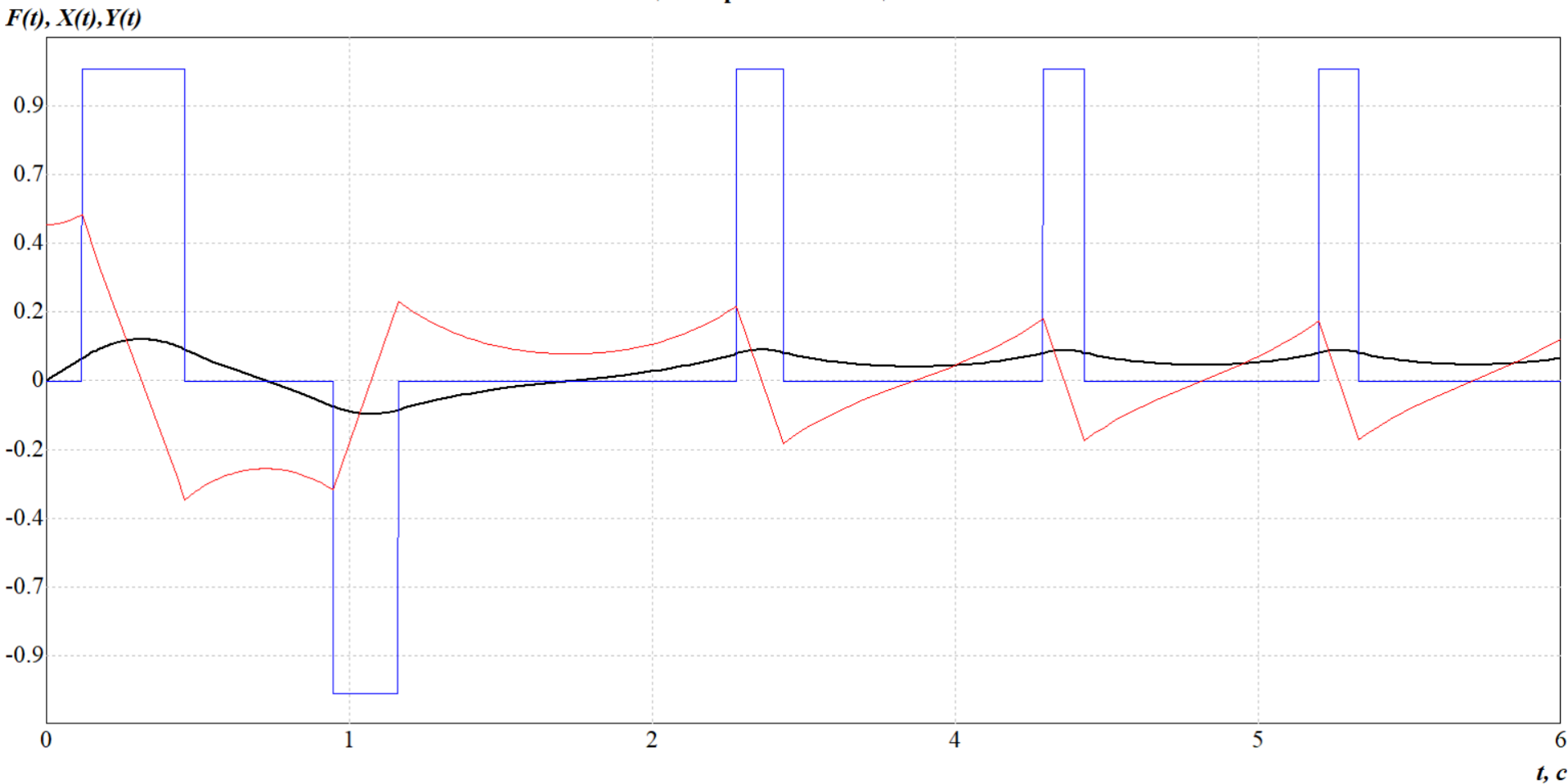


Схема в МВТУ



Осциллограмма при $k > k^*$

Осциллограмма совмещенная



$F(t)$

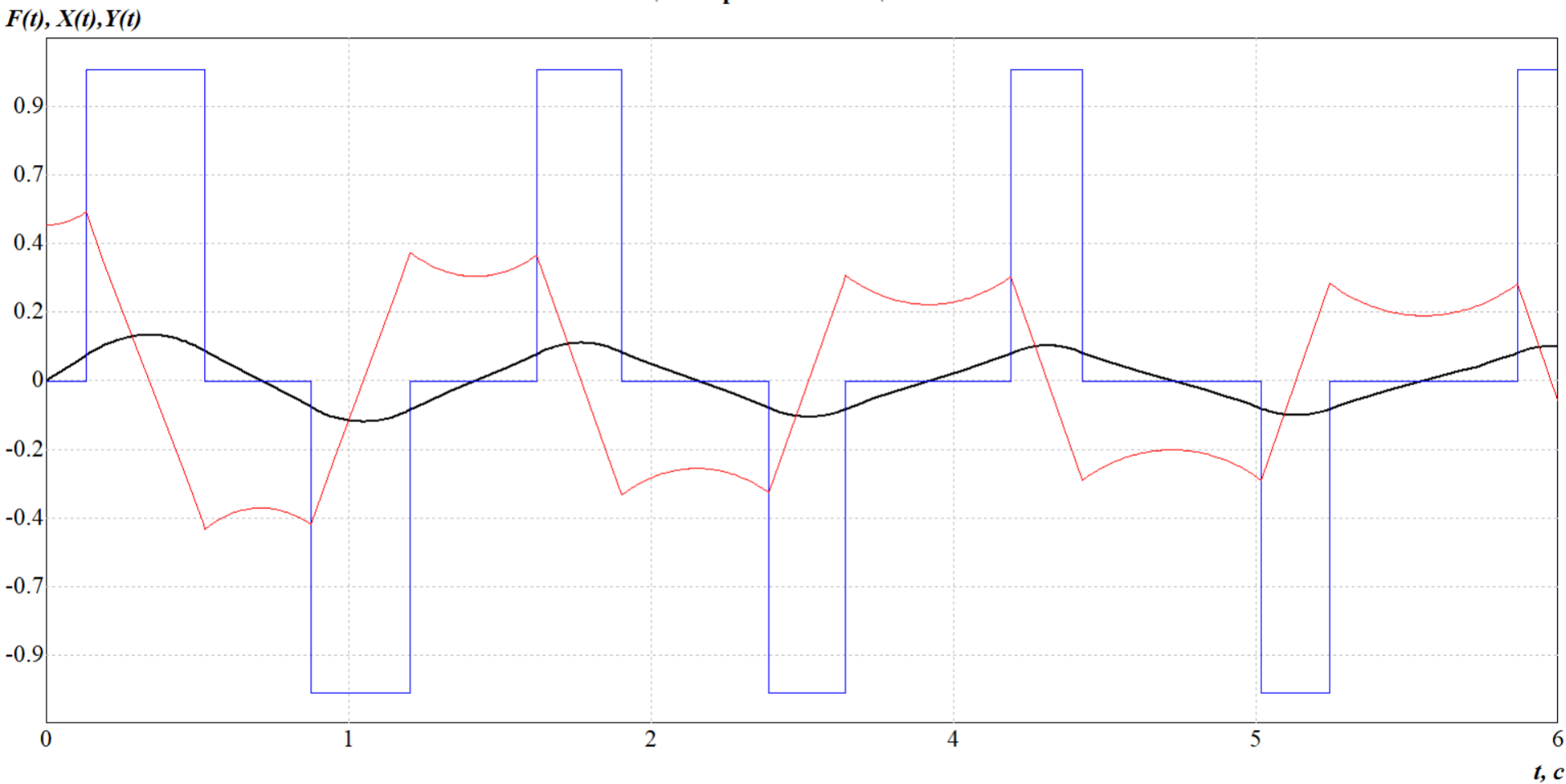
$X(t), \text{град}$

$Y(t), \text{град} / c$



Осциллограмма при $k < k^*$

Осциллограмма совмещенная



$F(t)$

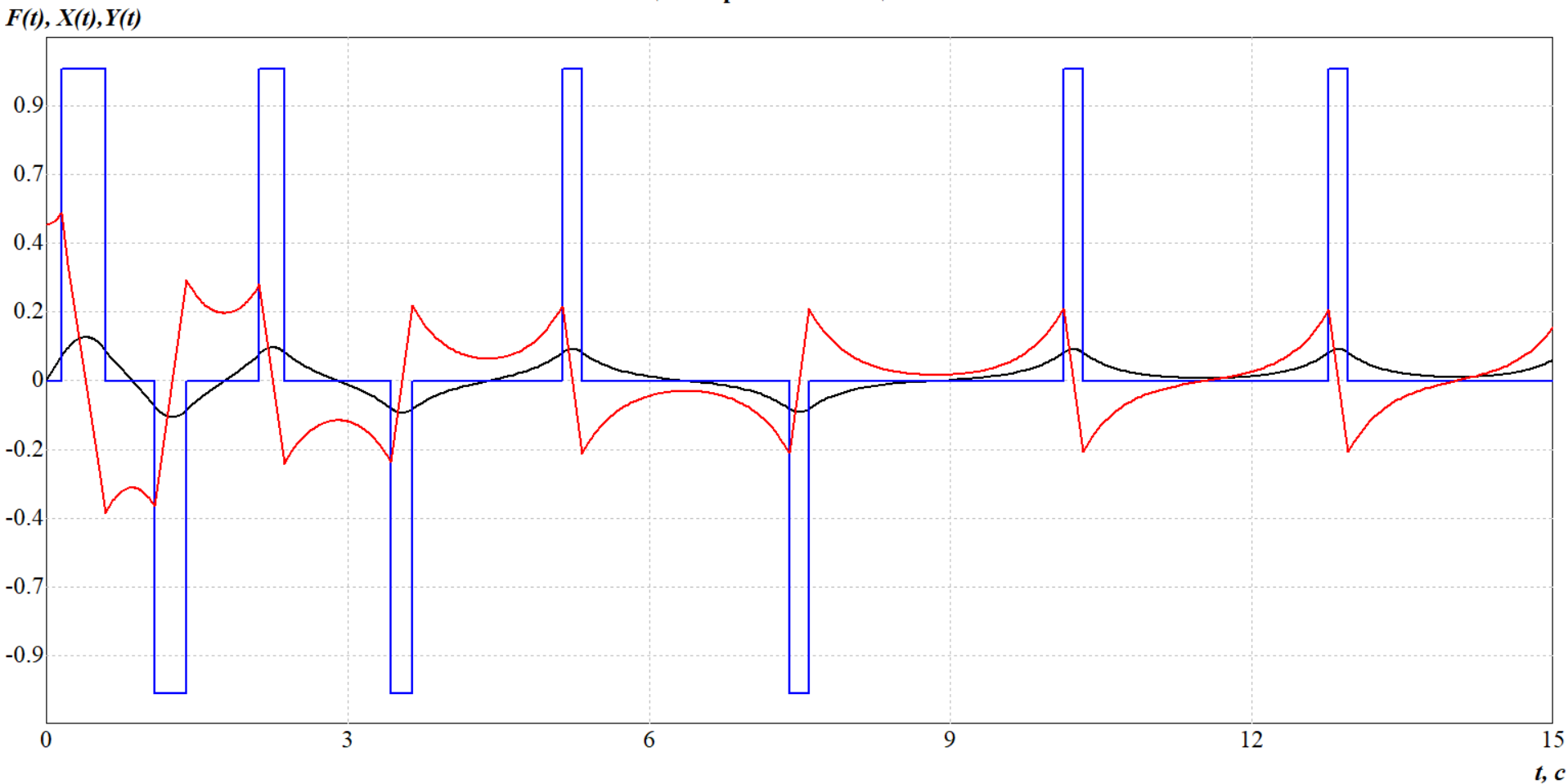
$X(t), \text{град}$

$Y(t), \text{град} / c$



Осциллограмма при $k = k^*$

Осциллограмма совмещенная



$F(t)$

$X(t), \text{град}$

$Y(t), \text{град} / c$



Диаграмма Ламерея

$$k > k^*$$

$$k < k^*$$

$$k = k^*$$

Диаграмма Ламерея

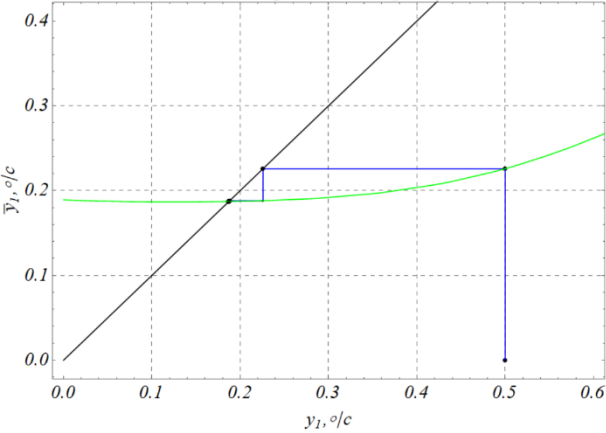


Диаграмма Ламерея

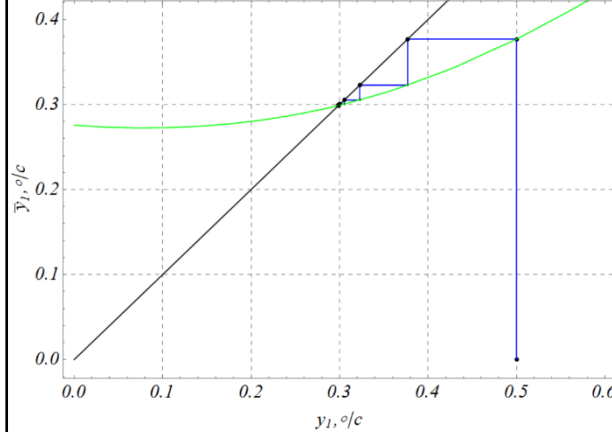
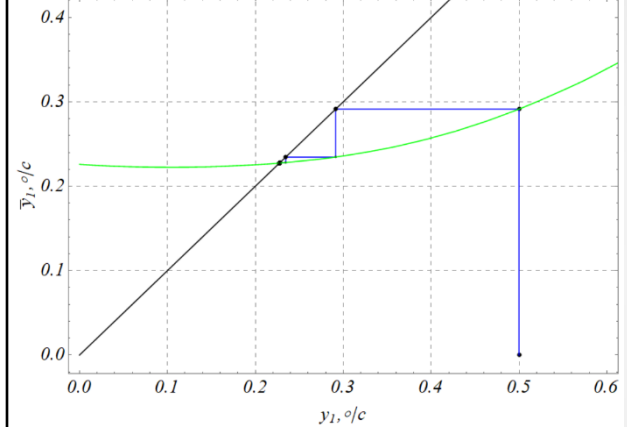


Диаграмма Ламерея



$$\bar{y}_1 = 0.1872 \text{ град} / \text{c}$$

$$\bar{y}_1 = 0.2987 \text{ град} / \text{c}$$

$$\bar{y}_1 = 0.2272 \text{ град} / \text{c}$$

Результаты

		Фазовая плоскость	Диаграмма Ламерея	МВТУ
$\overline{y}_1, \text{град} / c$	$k > k^*$	0,1870	0,1872	0,1885
	$k < k^*$	0,2988	0,2987	0,301
	$k = k^*$	0,2275	0,2272	0,2282
Погрешность		0,61%	0,67%	0%

Вывод

1. Составлена и проанализирована физическая модель системы «обратный маятник»;
2. Составлена и проанализирована математическая модель системы «обратный маятник»;
3. Показан вывод критического значения k^* ;
4. Проведено сравнение фазовых портретов при различных k ;
5. Проведен анализ осциллограмм при различных значениях k ;
6. Показана Диаграмма Ламерея для каждого значения k ;
7. Приведены результаты расчёта скорости ПЦ тремя разными способами. Вычислена относительная погрешность.

Список литературных источников

- [1] Hemani H., Golliday C. The inverted pendulum and biped stability. Math. Biosci, 34, 1977, p. 95-110.
- [2] Kieffer J., Bale R. Walking viability and gain synthesis for novel class dynamically-simple biped walking machines. Informatica, 17, 1993, p. 145- 155.
- [3] Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. – М.- Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 548 с.
- [4] Гаушус Э.В. *Исследование динамических систем методом точечных преобразований*. М.: Наука, 1976, 368 с.

