



МГТУ имени Н.Э. Баумана
Студенческая научная весна
Аэрокосмический факультет
май 2020



9. ПОЛУЧЕНИЕ НЕСИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ

Автор:

студент гр. АК2-101 **Казанский** *Аркадий Дмитриевич*

Руководитель:

старший преподаватель каф. СМ-2, инженер АО «ВПК «НПО
машиностроения» **Хамидуллин** *Руслан Камилевич*

Москва, 2020

Проблема

В рамках МКЭ для консервативных систем матрица жесткости является симметричной. Это можно доказать из соотношений:

$$\{u\}^T \cdot \{P\} = \{P\}^T \cdot \{u\}$$

$\{P\}$ - Вектор сил в узловых точках;

Откуда

$\{u\}$ - Вектор перемещения узловых точек;

$$\{u\}^T \cdot [K] \cdot \{u\} = ([K] \cdot \{u\})^T \cdot \{u\} = \{u\}^T \cdot [K]^T \cdot \{u\}$$

$$[K] = [K]^T$$

$[K]$ - Матрица жесткости

В работе показывается, что при наличии в системе сил трения скольжения получается несимметричная матрица жесткости, которую невозможно поделить на симметричную и кососимметричную из-за зависимости от знака скорости.

Задача

В данной работе проводится исследование поведения неконсервативной системы с двумя степенями свободы. Особенностью данной системы является несимметричная матрица жесткости, получаемая в процессе решения системы динамических уравнений системы. Проводится сравнение ее поведения с динамикой подобной ей консервативной системы с симметричной матрицей жесткости.

Актуальность проблемы

Исследование неконсервативных систем выявило ряд удивительных свойств упругих систем, такие как «негативизм», «парадокс» Циглера, и другие. Среди авторов, внесший большой вклад в данные исследования можно отметить Л. Эйлера, Я. Г. Пановко, К. В. Циглера и др.

В настоящей работе рассмотрен ещё один необычный эффект, в результате которого матрица жесткости становится несимметричной под воздействием силы трения скольжения.

Методы исследования

Для решения примера неконсервативной системы с несимметричной матрицей жесткости использовался метод численного интегрирования, реализованный в программном пакете MATLAB.

Основная часть

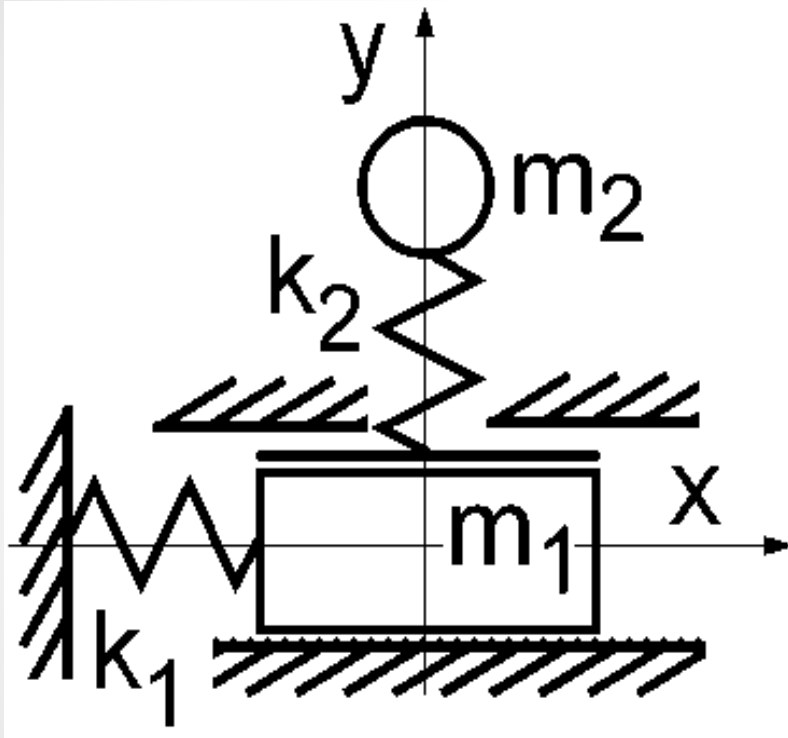
Общий вид симметричной матрицы жесткости, используемой при решении задач в рамках МКЭ

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{n-2;n} \\ k_{31} & \dots & k_{n-1;n-1} & k_{n-1n} \\ \dots & k_{n;n-2} & k_{n;n-1} & k_{nn} \end{bmatrix}$$

$$k_{ij} = k_{ji}, \quad j \neq i; \quad i, j = 1, \dots, n$$

ПРИМЕР:

Исследуемая система



Система ДУ движения исследуемой системы:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} = -k_1 x - f((m_1 + m_2)g - k_2 y) \cdot \text{sign}(\dot{x}) \\ m_2 \ddot{y} = -k_2 y \end{cases}$$

где f — коэффициент трения скольжения о нижнюю поверхность.

За счет действия неконсервативной силы (силы трения), матрица жесткости такой системы несимметрична.

Система ДУ движения исследуемой системы в матричной форме:

$$M \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} - \text{матрица инерции исследуемой системы;}$$

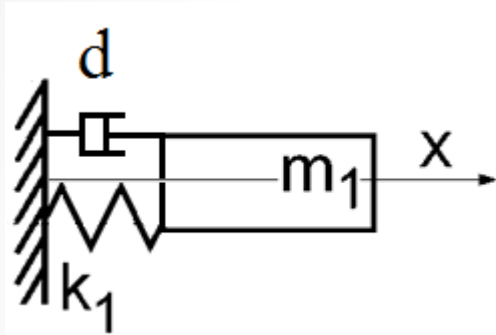
$$K = \begin{pmatrix} -k_1 & -f \cdot k_2 \cdot \text{sign}(\dot{x}) \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix} - \text{матрица жесткости исследуемой системы;}$$

$c_1 = -f m_1 g$ – константа.

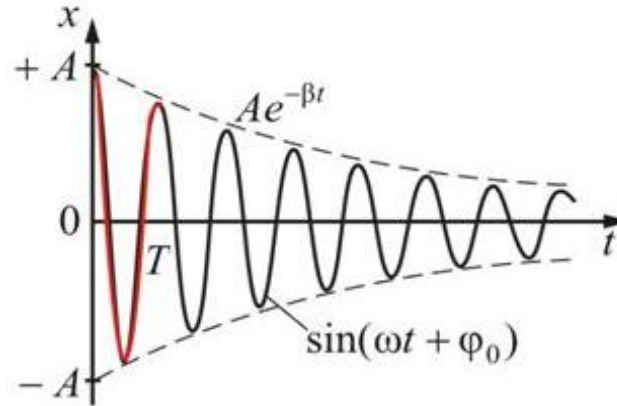
Для численного интегрирования системы в пакете Matlab принята следующая конфигурация системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = 2 \text{ кг}; m_2 = 0,1 \text{ кг} \\ k_1 = k_2 = 20 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \\ f = 0,1 \\ x_0 = 0,7 \text{ м} \\ y_0 = 1 \text{ м} \\ \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0 \end{array} \right.$$

Поведение неконсервативной системы сравнивается с динамикой подобной ей консервативной системы.



Подобная исследуемой
консервативная система



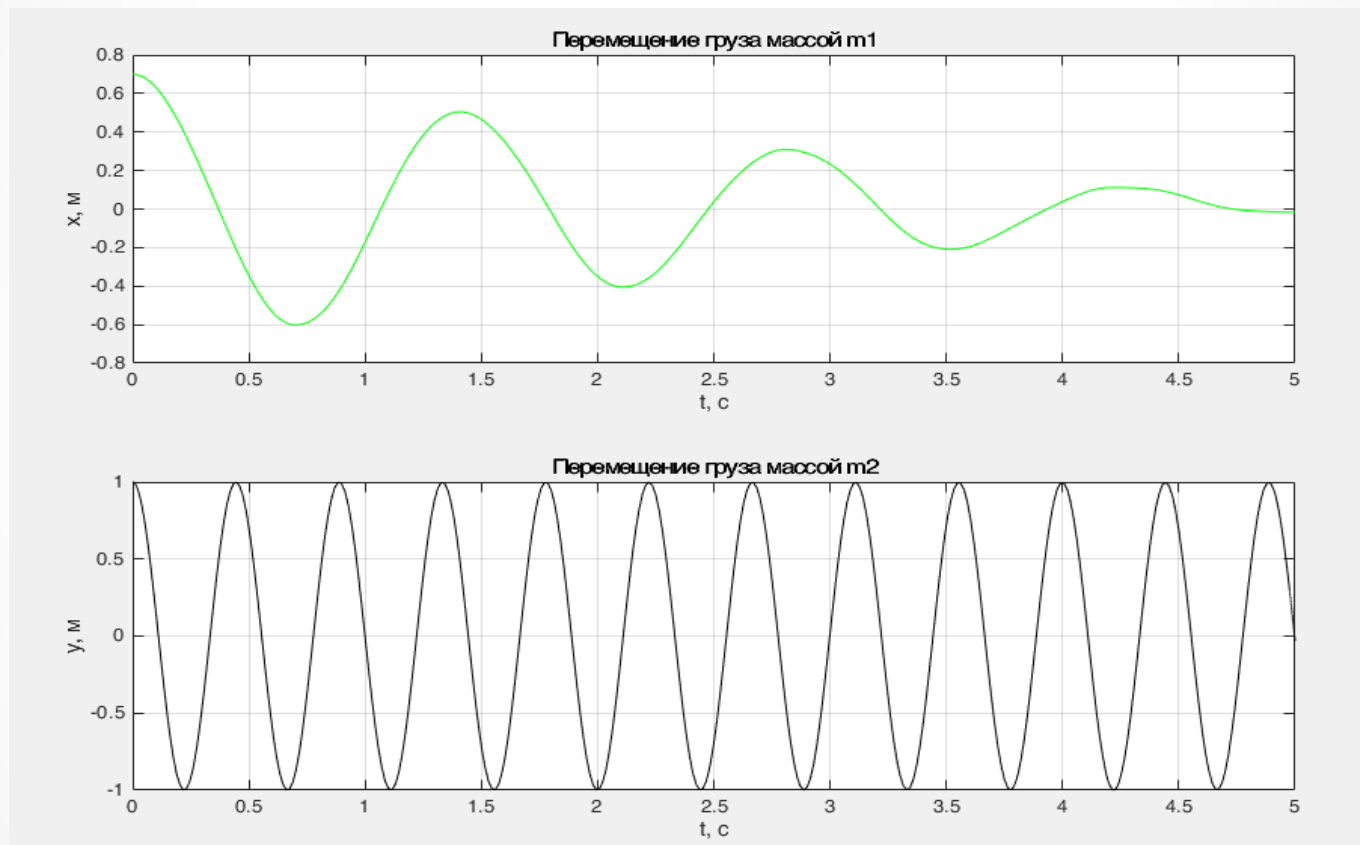
Вид решения для консервативной системы

$$\beta = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{A(t)}{A(t+T)}\right)$$

Формула для определения коэффициента затухания

Результаты

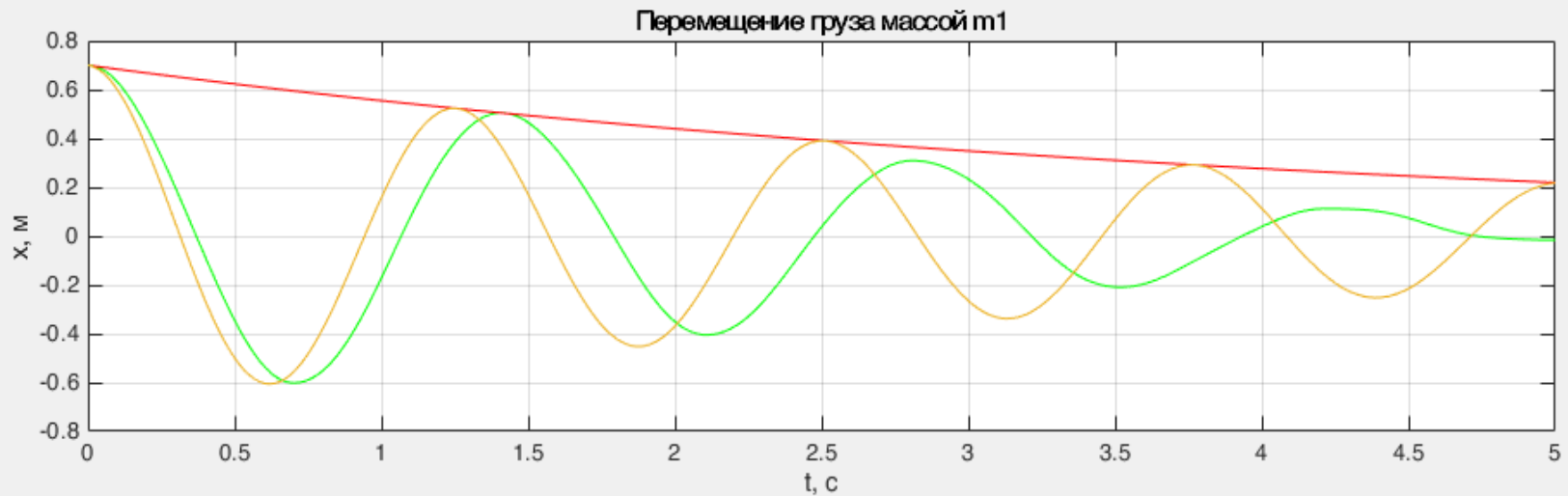
Динамика исследуемой неконсервативной системы



Осциллограммы перемещения грузов массами m_1 и m_2

Результаты

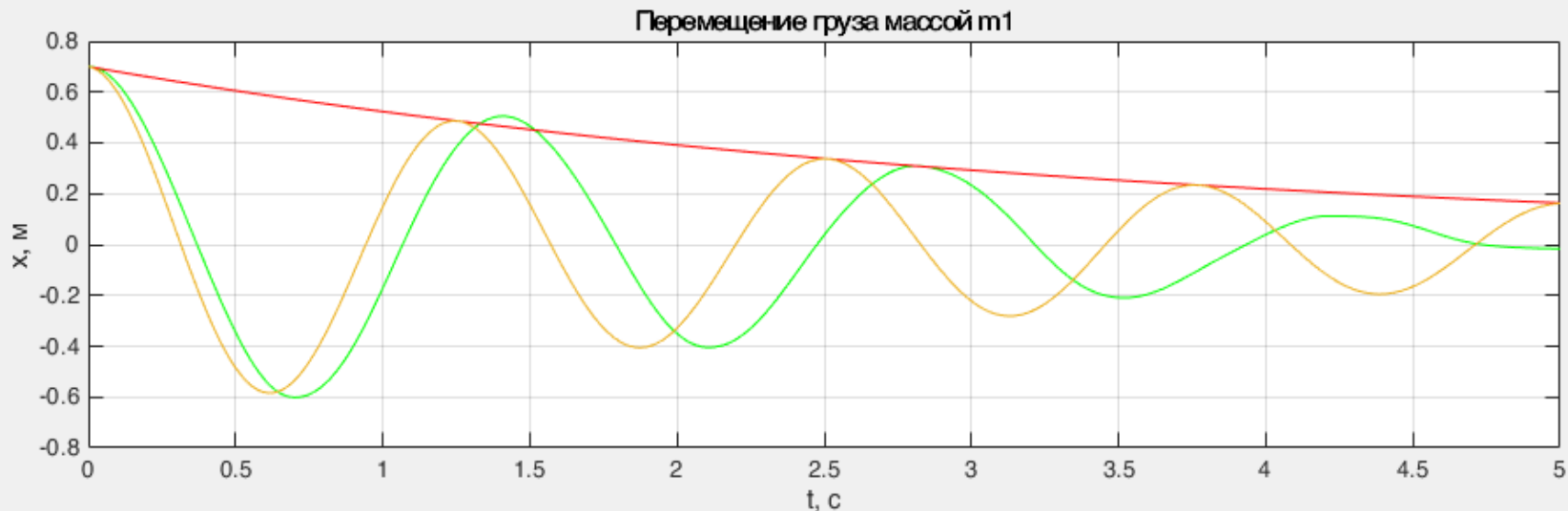
Сравнение динамики перемещения груза массой m_1 в консервативной и неконсервативной системах



Осциллограмма перемещения груза массой m_1 в неконсервативной (зеленым) и консервативной (желтым) системах. Коэффициент затухания решения консервативной системы соответствует первому периоду колебаний в неконсервативной системе.

Результаты

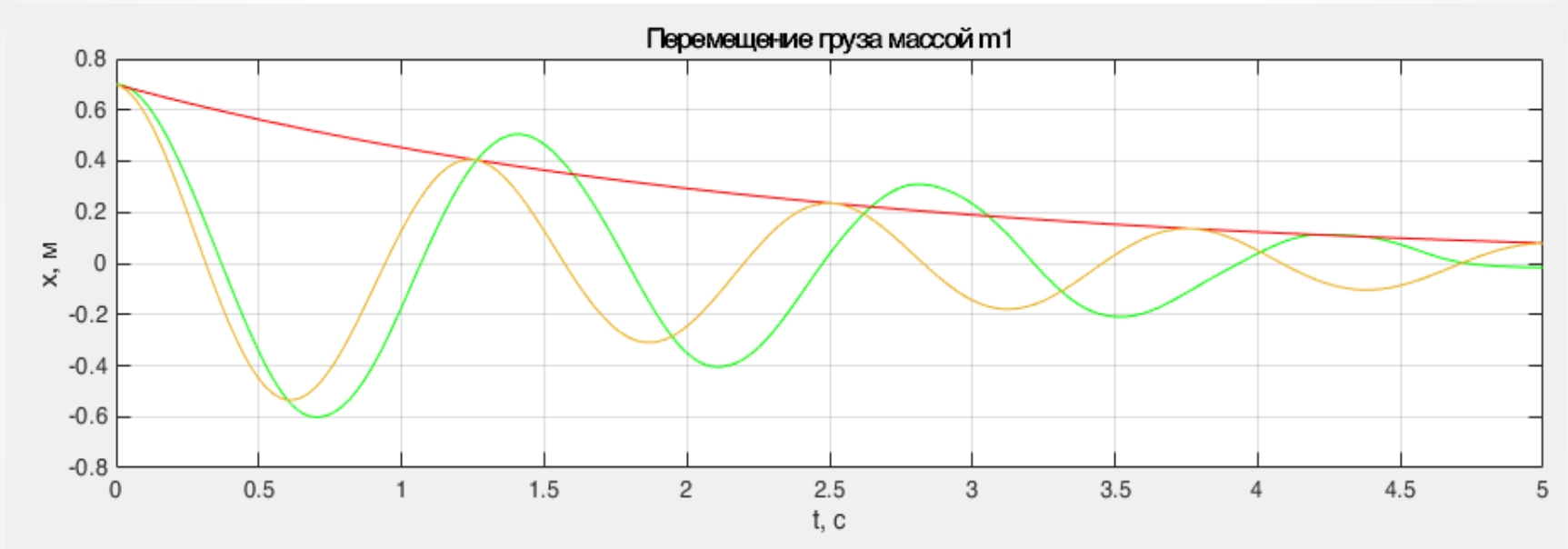
Сравнение динамики перемещения груза массой m_1 в консервативной и неконсервативной системах



Осциллограмма перемещения груза массой m_1 в неконсервативной (зеленым) и консервативной (желтым) системах. Коэффициент затухания решения консервативной системы соответствует второму периоду колебаний в неконсервативной системе.

Результаты

Сравнение динамики перемещения груза массой m_1 в консервативной и неконсервативной системах



Осциллограмма перемещения груза массой m_1 в неконсервативной (зеленым) и консервативной (желтым) системах. Коэффициент затухания решения консервативной системы соответствует третьему периоду колебаний в неконсервативной системе.

Выводы

Наличие в системе трения скольжения может привести к несимметричности матрицы жесткости, что расходится с основными положениями МКЭ и, как следствие, делает неточным расчет с использованием данного метода. В настоящей работе был рассмотрен пример такой системы, решенный при помощи численного интегрирования.

Список литературных источников

- 1 Павлов, А.С. Метод конечных элементов в статике стержневых конструкций: курс лекций/ А.С. Павлов; Балт. гос. техн. ун-т. – Спб., 2013
- 2 Бруяка, В.А. Б 89 Инженерный анализ в ANSYS Workbench: Учеб. пособ. /. В.А. Бруяка, В.Г. Фокин, Е.А. Солдусова, Н.А. Глазунова, И.Е. Адеянов. – Самара: Самар. Гос техн ун-т, 2010. – 217 с.: ил.
- 3 Каримов Ильдар. Строительная механика. Формирование и решение глобальной системы конечно-элементных уравнений [Электронный ресурс] // Электронный учебный курс для студентов очной и заочной формы обучения. URL: <http://www.stroitmeh.ru/lect76.htm> (дата обращения 10.05.2020).
- 4 Аринчев, С.В. Теория колебаний неконсервативных систем (с примерами на компакт-диске): Учеб. пособие для вузов. – М: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002. – 464 с.: ил.
- 5 Доля, П.Г. Использование MATLAB. Решение дифференциальных уравнений. Харьковский Национальный Университет механико-математический факультет кафедра геометрии им. А.В. Погорелова.
- 6 Байков А.Е. Устойчивость и колебания некоторых неконсервативных систем: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук МАИ, М., 2011.