



МГТУ имени Н.Э. Баумана
Студенческая научная весна
Аэрокосмический факультет
май 2020



11. ТЕНЗОР ИНЕРЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ТРАНСФОРМИРУЕМОЙ КОНСТРУКЦИИ

Автор:
студент группы АК1-81 *Алёхин Никита Александрович*

Руководитель:
к.т.н., доцент каф. СМ-2 *Симоньянц Ростислав Петрович*

Москва, 2020

Проблема

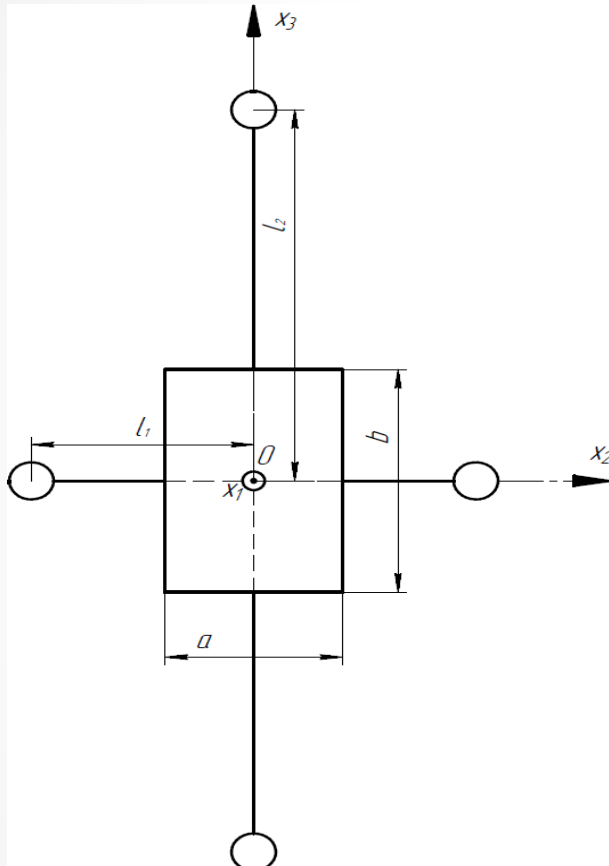
В целях минимизации затрат энергии и рабочего тела на управление ориентацией и стабилизацию орбитального космического аппарата могут применяться специальные конструкции, создающие гравитационные моменты за счёт изменения распределения масс. Для соответствующих алгоритмов трансформации конструкции необходимы аналитические соотношения, отсутствующие в литературных источниках.

Задача

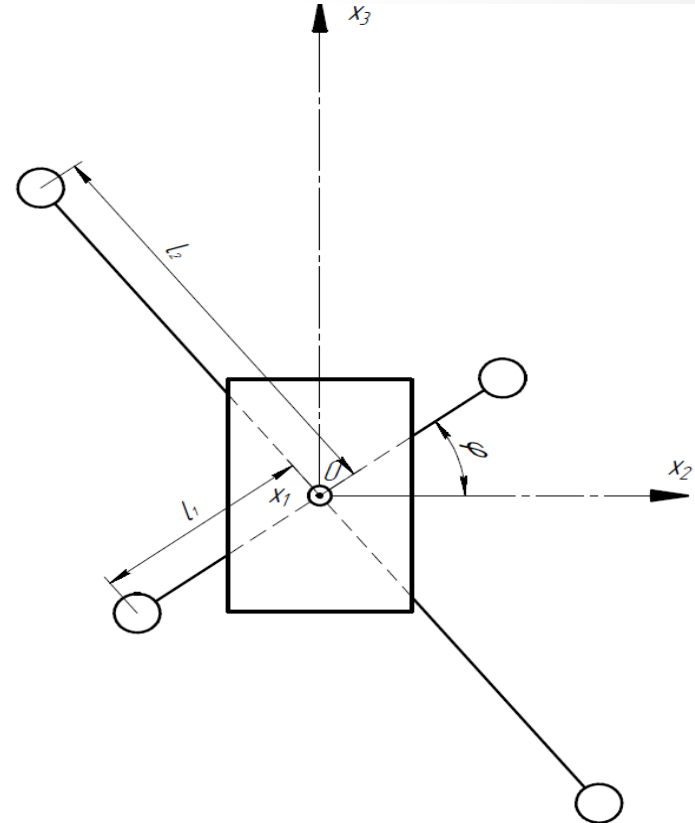
На основе классических положений теоретической механики, определяющих инерционные свойства твёрдого тела во вращательном движении, найти аналитические зависимости компонент тензора инерции от параметра, характеризующего геометрию масс трансформируемой конструкции КА.

Модель КА трансформируемой конструкции

Ортогональная система невесомых штанг с грузами не концах



Исходное состояние



Трансформированное состояние задаётся углом φ

Тензор инерции

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{12} & J_2 & -J_{12} \\ -J_{13} & -J_{23} & J_3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} J_{12} &= \int x_1 x_2 dm; \\ J_{23} &= \int x_2 x_3 dm; \\ J_{13} &= \int x_1 x_3 dm \end{aligned}$$

$$J_1 = \int (x_2^2 + x_3^2) dm; \quad J_2 = \int (x_3^2 + x_1^2) dm; \quad J_3 = \int (x_1^2 + x_2^2) dm$$

$Ox_1x_2x_3$ — связанные с основным телом центральные оси координат

В исходном состоянии массы распределены симметрично
– тензор инерции диагональный.

Используя аддитивность свойств тензора инерции, представим его в виде суммы двух тензоров:

$$J = J_o + J_{ш}$$

J_o — Момент инерции основного тела трансформируемого КА;

$J_{ш}$ — Момент инерции поворотной штанговой конструкции;

При неизменном положении основного тела:

$$J_o = \text{diag}(A, B, C)$$

Тензор инерции J_{uu} при повороте штанг

Осевые моменты инерции штанг:

$$(J_1)_{uu} = \sum (x_2^2 + x_3^2) m = ml_1^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + ml_2^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \\ + ml_1^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + ml_2^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 2m(l_1^2 + l_2^2)$$

$$(J_2)_{uu} = \sum (x_3^2 + x_1^2) m = m(l_1^2 \sin^2 \varphi + 0) + m(l_2^2 \cos^2 \varphi + 0) + \\ + m(l_1^2 \sin^2 \varphi + 0) + m(l_2^2 \cos^2 \varphi + 0) = 2m(l_1^2 \sin^2 \varphi + l_2^2 \cos^2 \varphi)$$

$$(J_3)_{uu} = \sum (x_1^2 + x_2^2) m = m(0 + l_1^2 \cos^2 \varphi) + m(0 + l_2^2 \sin^2 \varphi) + m(0 + l_1^2 \cos^2 \varphi) + \\ + m(0 + l_2^2 \sin^2 \varphi) = 2m(l_1^2 \cos^2 \varphi + l_2^2 \sin^2 \varphi)$$

Центробежные моменты инерции штанг:

$$(J_{12})_{uu} = \sum x_1 x_2 m = 0$$

$$(J_{23})_{uu} = \sum x_2 x_3 m = m(l_1^2 \sin \varphi \cos \varphi - l_2^2 \sin \varphi \cos \varphi + l_1^2 \sin \varphi \cos \varphi - l_2^2 \sin \varphi \cos \varphi) = m \sin \varphi \cos \varphi (l_1^2 - l_2^2)$$

$$(J_{13})_{uu} = \sum x_1 x_3 m = 0$$

Результат:

Моменты инерции трансформированной конструкции:

$$J_1 = A + 2m(l_1^2 + l_2^2)$$

$$J_2 = B + 2m(l_1^2 \sin^2 \varphi + l_2^2 \cos^2 \varphi)$$

$$J_3 = C + 2m(l_1^2 \cos^2 \varphi + l_2^2 \sin^2 \varphi)$$

$$J_{23} = J_{32} = -\frac{1}{2}m(l_1^2 - l_2^2)\sin 2\varphi$$

$$J_{12} = J_{21} = J_{13} = J_{31} = 0$$

Максимальное и минимальное отклонение тензора инерции:

Минимальное отклонение

$$(J_{23})_{uu} = 0$$

$$-\frac{1}{2}m \sin(2\varphi)(l_1^2 - l_2^2) = 0$$

$$\sin(2\varphi) = 0$$

$$\varphi = \pi n \quad n \in R$$

Максимальное отклонение

$$\frac{d(J_{23})_{uu}}{d\varphi} = 0$$

$$-m \cos(2\varphi)(l_1^2 - l_2^2) = 0$$

$$\cos(2\varphi) = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi n \quad n \in R$$

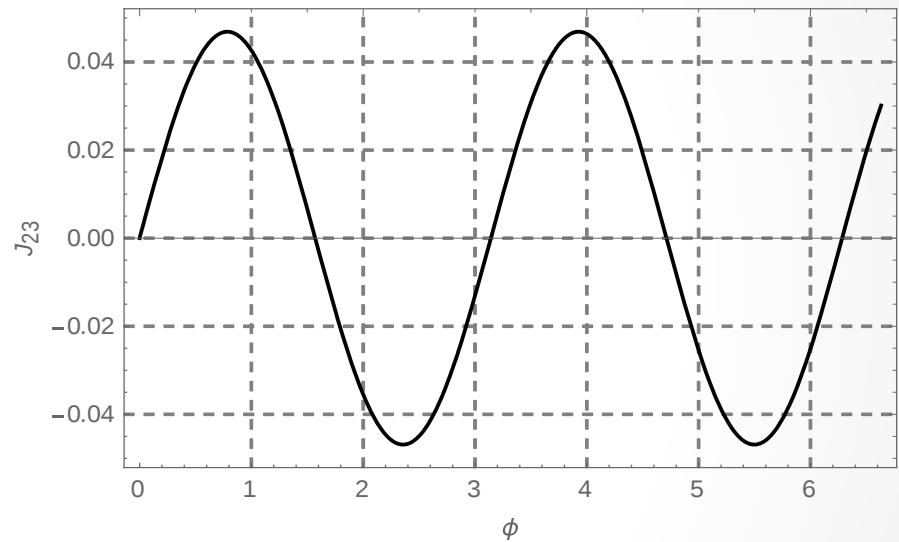
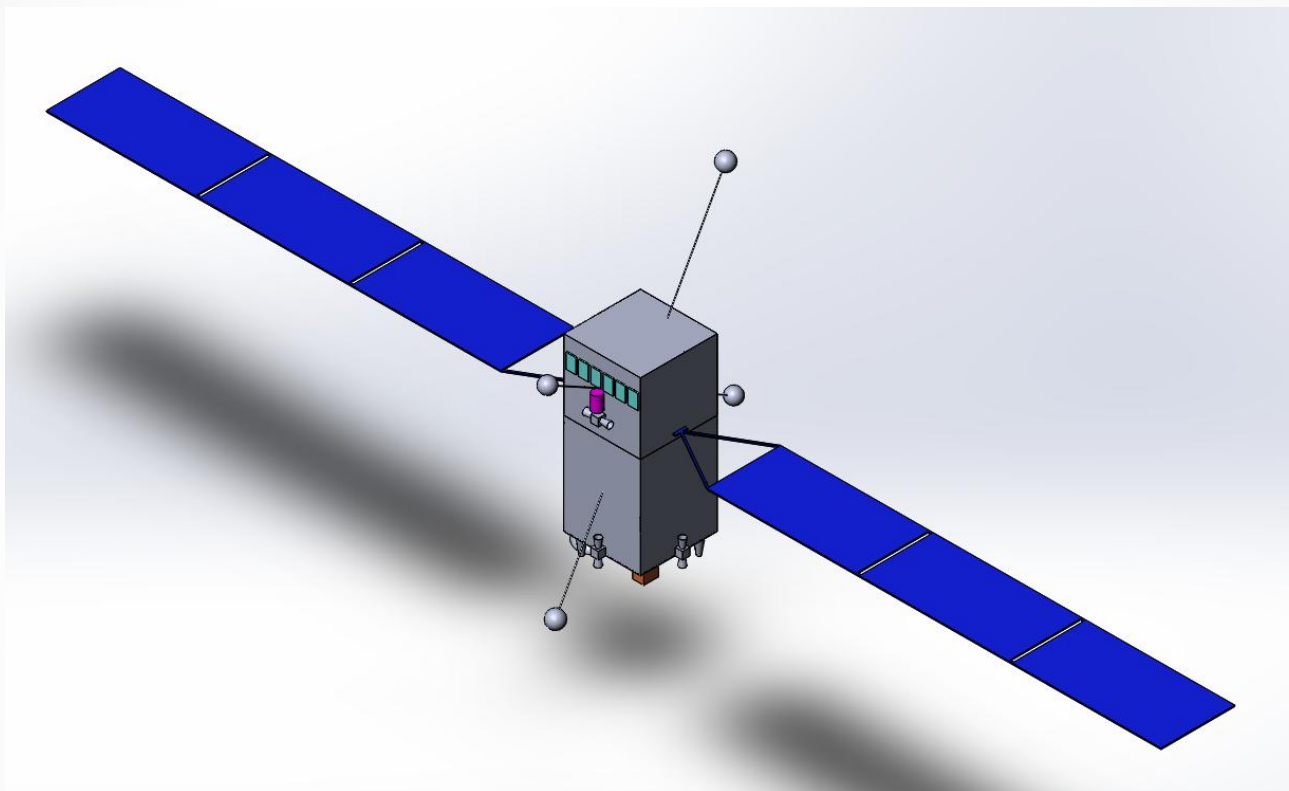


График изменения центробежного тензора
инерции от угла поворота штанг

Пример использования



Использование системы гравитационных штанг на спутнике ДЗЗ

Выводы

- Получена аналитическая зависимость, устанавливающая значение компонент тензора инерции трансформируемого КА в функции угла поворота штанговой конструкции.
- При повороте штанговой конструкции возникает центробежный момент инерции, пропорциональный двойному углу поворота

Список литературных источников

1. Курс теоретической механики: Учебник для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др.; под общ. Ред. К.С. Колесникова. 3-е изд., стереотип. – М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 736 с.
2. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц Теоретическая физика. Том 1. Механика. Издание 2-е, исправленное. – М.: Изд-во Наука, 1965. – 205 с.
3. К. Магнус Гироскоп теория и применение. М. Изд-во Мир, 1974. – 533 с