



МГТУ им. Н.Э. Баумана

Всероссийская студенческая конференция «Студенческая
научная весна», посвященная 170-летию В.Г. Шухова

Аэрокосмический факультет

Апрель 2023



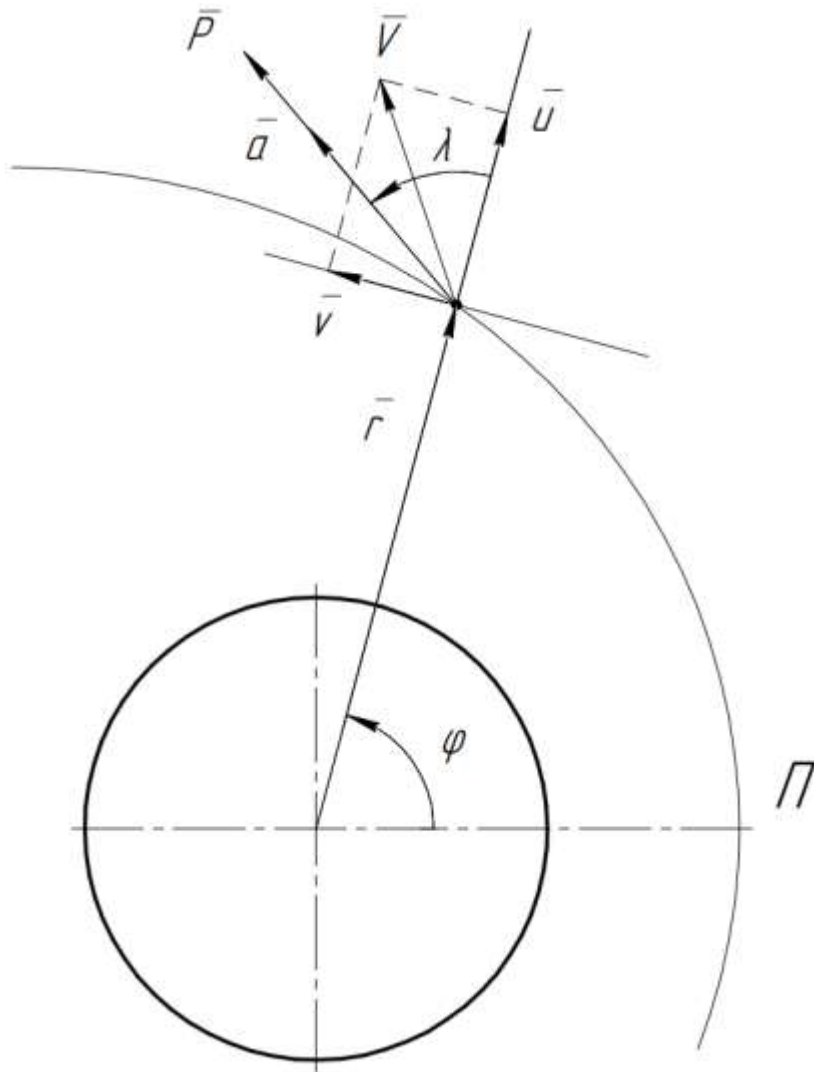
Задача компланарного перелета на околокруговую орбиту с применением двигателя малой тяги

Подготовил студент гр. АК1-101 Пашин Р.А.

Научные руководители: ст. преп. каф. ИУ-1 Аверьянов П.В.

к.т.н. доц. каф. СМ-2 Дмитриев С.Н.

Схема орбитального движения ЦМ КА



- $\bar{r}$ – радиус-вектор КА;
- φ – угол положения КА в плоскости орбиты;
- $\bar{u}$, $\bar{v}$ – радиальная и тангенциальная составляющие скорости КА соответственно;
- $\bar{V}$ – вектор скорости КА;
- λ – угол ориентации тяги в плоскости орбиты;
- $\bar{a}$ – управляющее линейное ускорение ЦМ КА;
- $\bar{P}$ – тяга двигателя, Н;

Математическая модель межорбитального движения ЦМ КА

СДУ движения ЦМ КА:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = u; \\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r}; \\ \frac{du}{dt} = \frac{v^2}{r} - \frac{1}{r^2} + \delta \cdot \frac{P}{m_0 - \frac{Pt}{J_{уд}}} \cdot \cos \lambda; \\ \frac{dv}{dt} = \frac{uv}{r} + \delta \cdot \frac{P}{m_0 - \frac{Pt}{J_{уд}}} \cdot \sin \lambda; \\ \frac{dT_p}{dt} = \delta; \end{cases}$$

Начальные условия:

$$t = 0: r = 1; \varphi = 0; u = 0; v = \sqrt{e_0 + 1}$$

Конечные условия:

$$t = t_k; r = r_k; v = v_k; e = 0$$

Связь размерных (обозначены «*») и безразмерных величин:

$$\begin{aligned} r &= \frac{r^*}{r_0^*}; \quad u = u^* \sqrt{\frac{r_0^*}{\mu}}; \quad v = v^* \sqrt{\frac{r_0^*}{\mu}}; \\ t &= \frac{t^*}{r_0^*} \sqrt{\frac{\mu}{r_0^*}}; \quad a = a^* \frac{r_0^{*2}}{\mu}; \quad J_{уд} = J_{уд}^* \sqrt{\frac{r_0^*}{\mu}}, \end{aligned}$$

где t – длительность перелёта;

δ – функция переключения тяги ДУ ($\delta = 1$ – ДУ включена, $\delta = 0$ – ДУ выключена);

T_p – время работы ДУ;

$J_{уд}$ – удельный импульс двигателя, м/с;

m_0 – масса КА в начальный момент времени, кг.

r_0^* – радиус перигея начальной орбиты, м;

$\mu = 3,986004418 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ – гравитационная постоянная Земли.

Задача оптимизации межорбитального перелета за минимальное время работы ДУ

Имеется известная

$$\delta \varphi + \lambda \sin \alpha \cdot \delta + \lambda \cos \alpha \cdot \delta + \frac{v \sin \varphi}{r} - \frac{u}{r^2} - \frac{v \sin \varphi}{r} + \frac{v \cos \varphi}{r} + u \cdot \delta = H$$

СДУ сопряженных переменных:

$$\begin{cases} \frac{dP_r}{dt} = \frac{P_\varphi v}{r^2} + \frac{P_u v^2}{r^2} - \frac{2P_u}{r^3} - \frac{P_v uv}{r^2}; \\ \frac{dP_\varphi}{dt} = 0; \\ \frac{dP_u}{dt} = -P_r + \frac{P_v v}{r}; \\ \frac{dP_v}{dt} = -\frac{P_\varphi}{r} - \frac{2P_u v}{r} + \frac{P_v u}{r}; \\ \frac{dP_p}{dt} = 0; \\ P_\varphi = 0; \quad P_{v0} = 1; \quad P_p = -a \end{cases}$$

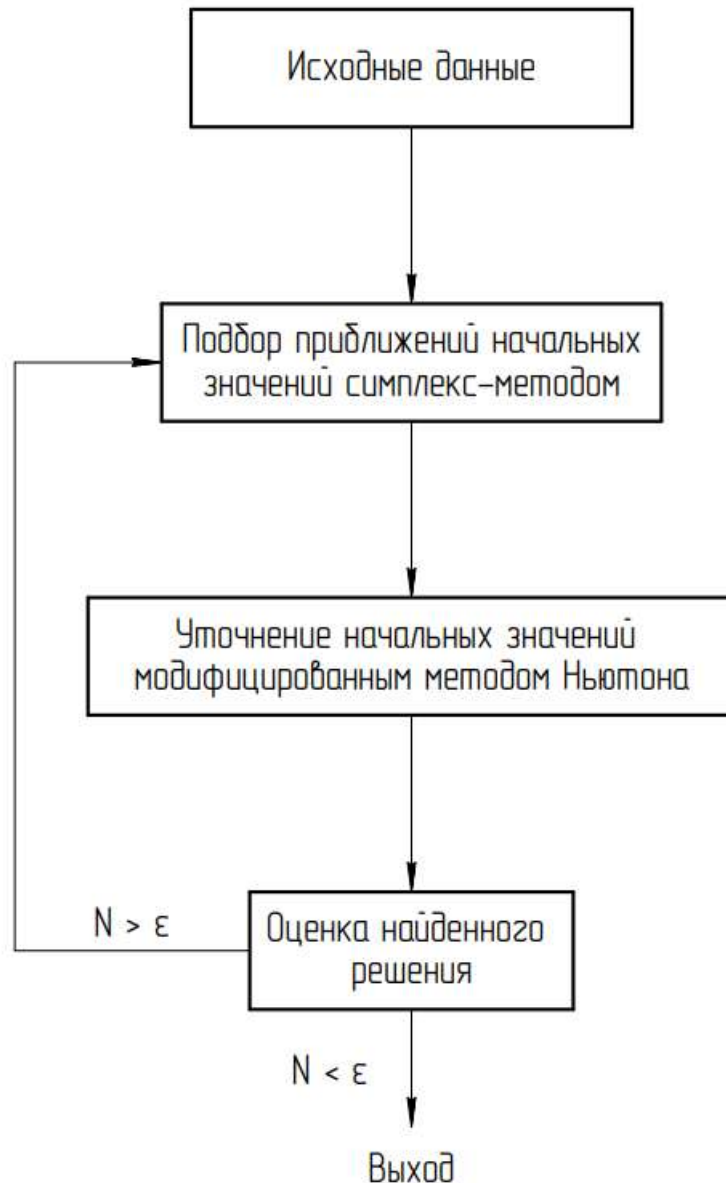
Определение угла ориентации тяги и функции переключения тяги:

$$\frac{dH}{d\lambda} = -\delta P_u a \sin \lambda + \delta P_v a \cos \lambda = 0$$

$$\sin \lambda = \frac{P_v}{\sqrt{P_u^2 + P_v^2}}; \quad \cos \lambda = \frac{P_u}{\sqrt{P_u^2 + P_v^2}};$$

$$\delta = \begin{cases} 1 \text{ при } \sqrt{P_u^2 + P_v^2} \geq 1 \\ 0 \text{ при } \sqrt{P_u^2 + P_v^2} < 1. \end{cases}$$

Общая схема решения



Параметры начальной орбиты; высота конечной орбиты;
параметры ДУ; начальная масса КА;
начальные приближения P_{r0} , P_{u0} .

Координаты начальных вершин:

$$\begin{aligned} x_1 &= (P_{r0}, P_{u0}, N_1); \\ x_2 &= (P_{r0} + dP_{r0}, P_{u0}, N_2); \\ x_3 &= (P_{r0} - dP_{r0}, P_{u0}, N_3), \\ \text{где } dP_{r0} &= 0,05. \end{aligned}$$

Компоненты вектора невязок:

$$\begin{aligned} f_{k1}(P_{r0}, P_{u0}) &= v_k - v_k^{\text{орб}} = v_k - \sqrt{\frac{1}{r_k^{\text{орб}}}} = 0 \\ f_{k2}(P_{r0}, P_{u0}) &= e_k = \sqrt{(r_k v_k^2 - 1)^2 + (r_k u_k v_k)^2} = 0. \end{aligned}$$

Вектор невязок:

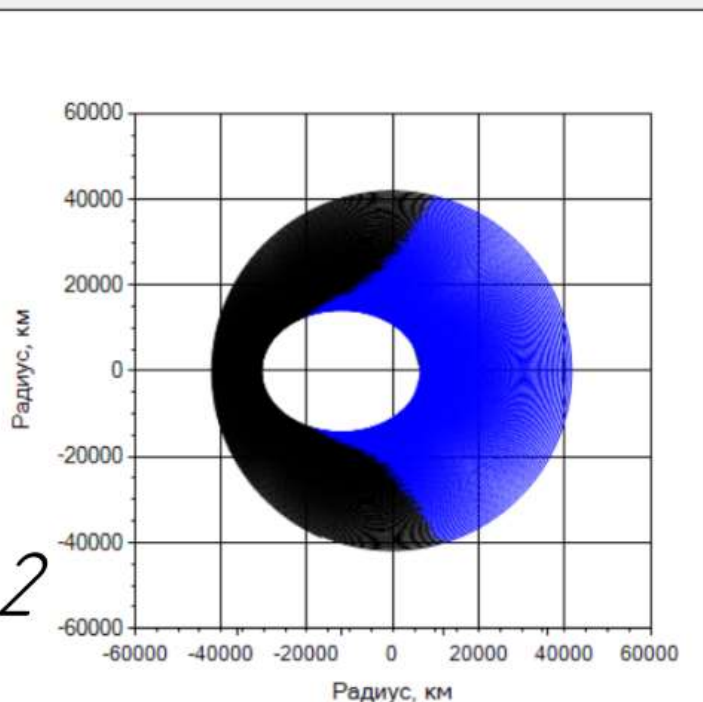
$$\begin{aligned} N &= c_1 \cdot |f_{k1}| + |f_{k2}| < \varepsilon, \\ \text{где } c_1 &= 0,1; \\ \varepsilon &= 0,001. \end{aligned}$$

Интерфейс приложения

Задача компланарного перелета КА с применением двигателя малой тяги

	Величина
Удельный импульс ДУ КА, с	1875.64
Тяга ДУ КА, Н	0.24
Начальная масса КА, кг	800
Высота перигея начальной орбиты, км	244
Высота апогея начальной орбиты, км	24320
Высота конечной орбиты, км	35787
Начальное приближение $P_1(0)$	1
Начальное приближение $P_2(0)$	0

Выполнить расчет



1. Область ввода исходных данных
2. Область графического вывода результатов расчета
3. Область текстового вывода

Параметр по оси X:
Радиус, км

Параметр по оси Y:
Радиус, км

Построить график

Статус решения Сходимость решения симплекс-методом Сходимость решения методом Ньютона Параметры перелета

21:41:13 Выполняется расчет методом Ньютона.
21:41:14 ОШИБКА. Вырождение сопряженных переменных.
21:41:14 Выполняется расчет методом Ньютона.
21:41:19 Расчет завершен. Решение не найдено.
21:41:19 Предпринимается попытка растяжения найденной вершины симплекса.
21:41:19 Выполняется расчет методом Ньютона.
21:41:19 ОШИБКА. Вырождение сопряженных переменных.
21:41:19 Растяжение не удалось.
21:41:19 Выполняется отражение худшей вершины симплекса.
21:41:19 Выполняется расчет методом Ньютона.
21:41:20 ОШИБКА. Вырождение сопряженных переменных.
21:41:20 Выполняется расчет методом Ньютона.
21:41:23 Расчет завершен. Решение найдено.
21:41:23 Выполнение расчета завершено.
21:41:37 Графическое окно вывода обновлено.

Длительность решения: 00:00:30.0

Сходимость решения:

Интерфейс приложения

Вкладка вывода значений векторов невязок, соответствующих вершинам симплекса

Статус решения		Сходимость решения симплекс-методом		Сходимость решения методом Ньютона	Параметры перелета
	Номер итерации симплекс-метода	Модуль вектора невязок в лучшей вершине	Модуль вектора невязок в промежуточной вершине	Модуль вектора невязок в худшей вершине	
▶	Начальные значения	0,024118	0,036831	0,048995	
	1	0,021141	0,024118	0,036831	
	2	0,001426	0,021141	0,024118	
	3	0,000383	0,001426	0,021141	

Вкладка вывода параметров итерационного процесса решения задачи методом Ньютона

Статус решения		Сходимость решения симплекс-методом		Сходимость решения методом Ньютона		Параметры перелета		
	Номер итерации симплекс-метода	Номер итерации метода Ньютона	Количество шагов интегрирования	Невязка трансверсальной компоненты скорости, м/с	Невязка эксцентриситета конечной орбиты	Модуль вектора невязок	Значение $Pr(0)$	Значение $Pu(0)$
234	3	3	70846	0.953215	0,007979	0,008102	0,88647641	1,932E-05
235	3	3	70833	1,038874	0,00747	0,007604	0,88648534	1,931E-05
236	3	3	71555	0,497378	0,015557	0,015621	0,88648981	1,93E-05
237	3	3	69815	0,336495	0,002471	0,002514	0,88649205	1,93E-05
238	3	4	69782	0,402574	0,003681	0,003733	0,88649196	1,93E-05
239	3	4	69907	0,026298	0,00038	0,000383	0,886492	1,93E-05

Интерфейс приложения

Вкладка вывода параметров, соответствующих найденному решению

Статус решения	Сходимость решения симплекс-методом	Сходимость решения методом Ньютона	Параметры перелета
			Величина
			Значение $P_r(0)$
			0,886492
			Значение $P_u(0)$
			1,93E-05
			Количество итераций симплекс-методом
			3
			Суммарное количество итераций методом Ньютона
			51
			Эксцентриситет орбиты в конечный момент времени
			0,00038
			Невязка трансверсальных компонент вектора скорости, м/с
			0,026298
			Длительность перелета, сут
			113,3
			Время работы ДУ, сут
			72,9

Выпадающие списки выбора параметра соответствующей оси

Параметр по оси X:

Радиус, км

Параметр по оси Y:

Радиус, км

- Радиус, км
- Радиус-вектор ЦМ КА, км
- Время полета, сут
- Угол ориентации тяги, град
- Функция переключения тяги ДУ
- Величина вектора скорости, м/с
- Эксцентриситет орбиты

Контекстное меню графика

- Исходное масштабирование
- Показать основную сетку
- Показать вспомогательную сетку

Тестовый пример. Исходные данные

Наименование	Величина
Параметры орбит	
Высота перигея начальной орбиты, км	244
Высота апогея начальной орбиты, км	24320
Эксцентриситет начальной орбиты	0,645
Высота конечной орбиты, км	35787
Параметры КА	
Начальная масса КА, кг	800
Тяга двигателя, Н	0,24
Удельный импульс двигателя, с	1875,64
Параметры решения	
Шаг интегрирования, с	140
Начальное приближение P_{r0}	1
Начальное приближение P_{u0}	0

Выбор приближений
начальных значений
сопряженных переменных:

$$\operatorname{tg} \lambda_0 = \frac{P_{v0}}{P_{u0}}$$

С учётом того, что $P_{v0} = 1$:

$$P_{u0} = \operatorname{ctg} \lambda_0$$

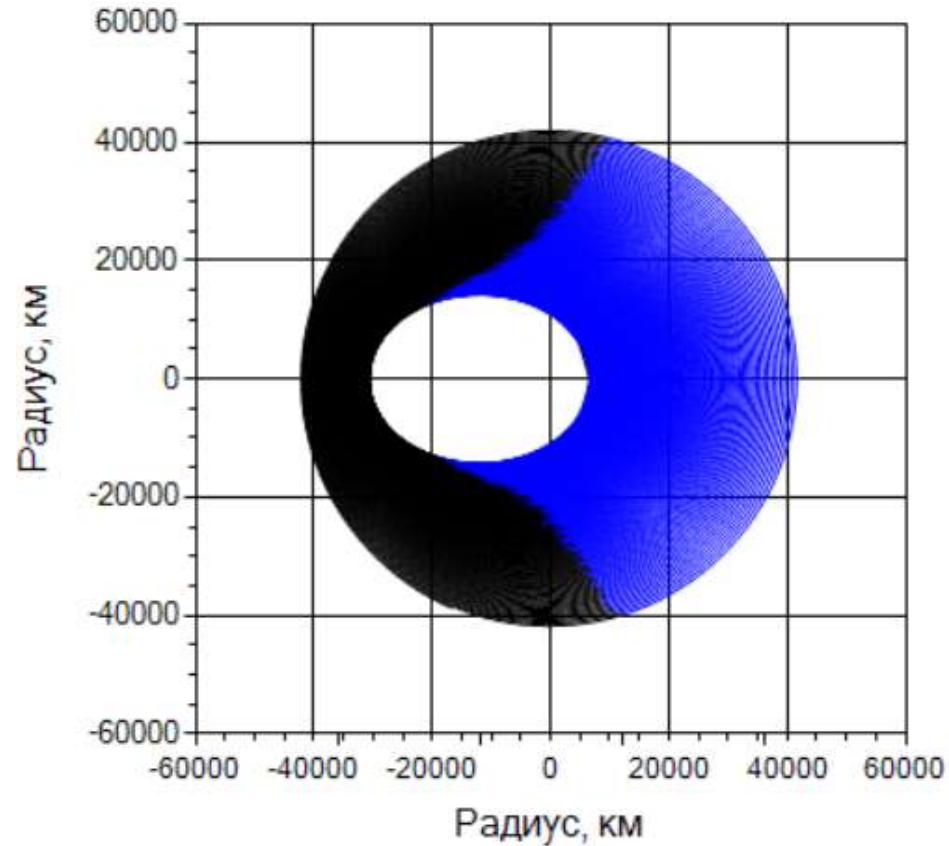
$$P_{r0} = 2 \cos^2 \lambda \operatorname{ctg} \lambda + 1$$

Тогда при $\lambda_0 = 90^\circ$:

$$P_{r0} = 1, \quad P_{u0} = 0$$

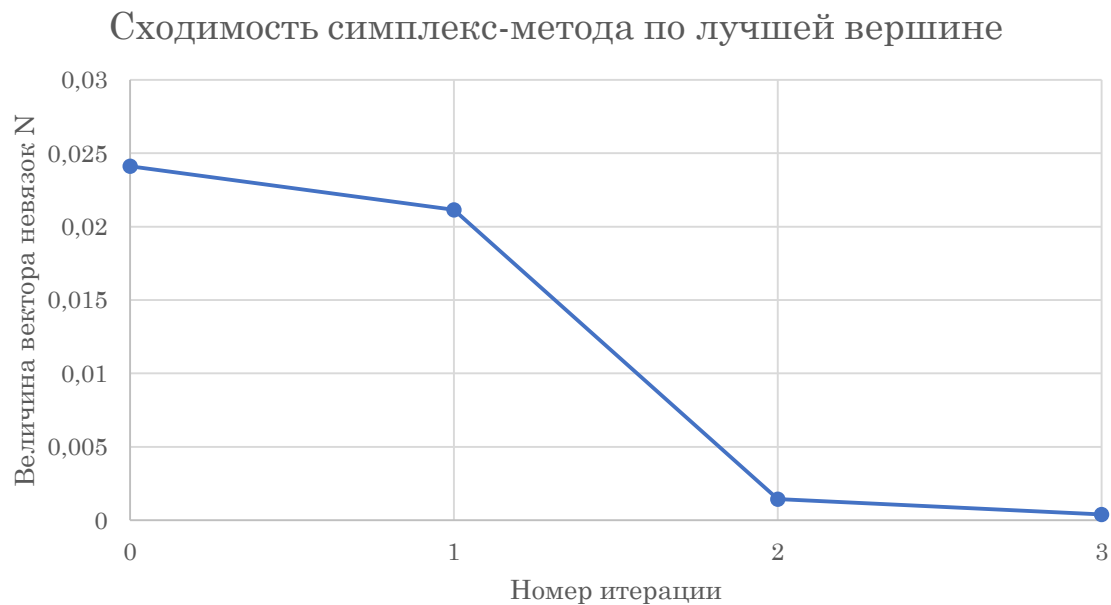
Параметры и траектория перелета

Наименование	Величина
Величина вектора невязок	0,000383
Начальное значение P_T	0,886492
	1,93E-05
Количество итераций симплекс-методом	3
Количество итераций методом Ньютона	51
Эксцентриситет орбиты в конечный момент времени	0,00038
Невязка трансверсальных компонент вектора скорости, м/с	0,026298
Длительность перелёта, сут	113,3
Время работы ДУ, сут	72,9
Относительное время работы ДУ, %	64,3
Количество витков	247
Затраты характеристической скорости, м/с	1996,6
Масса потребного топлива, кг	82,3

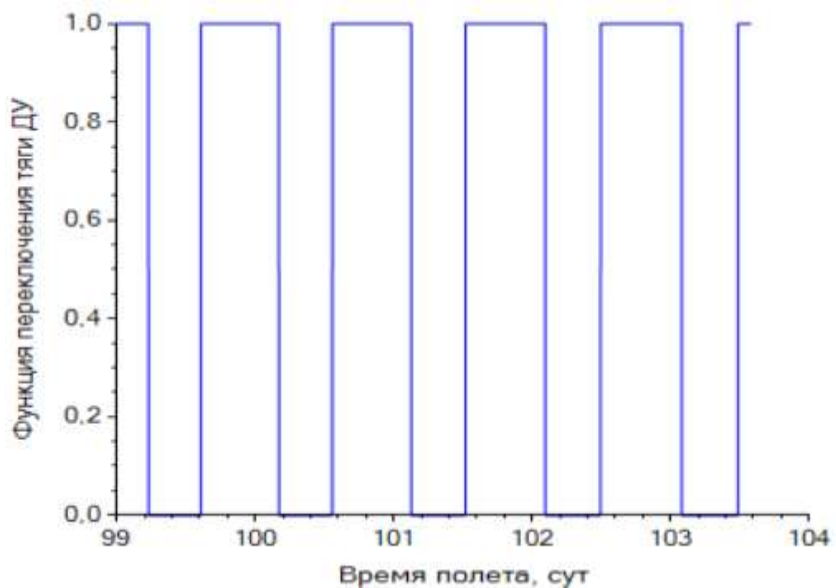
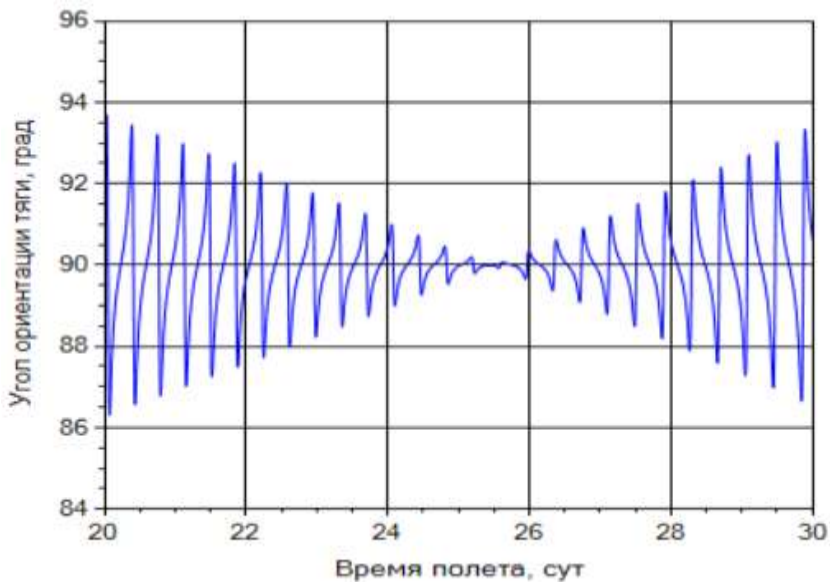
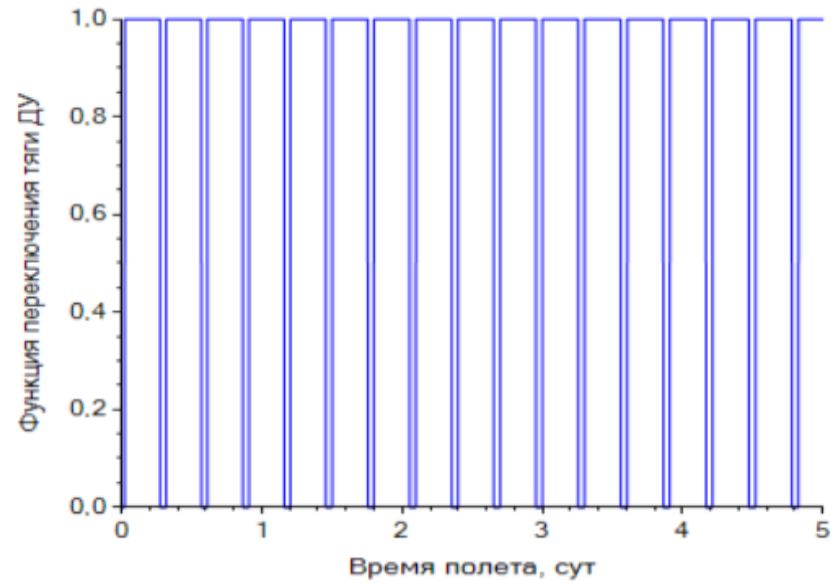
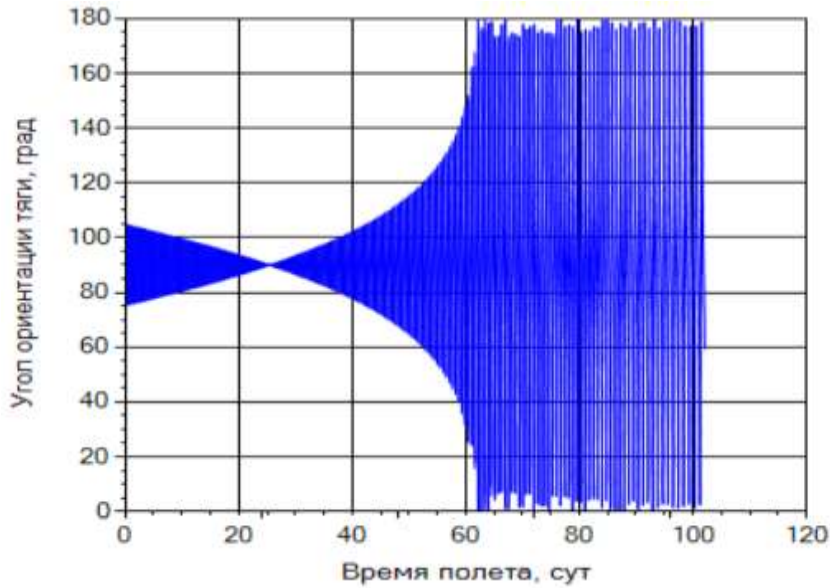


Сходимость симплекс-метода

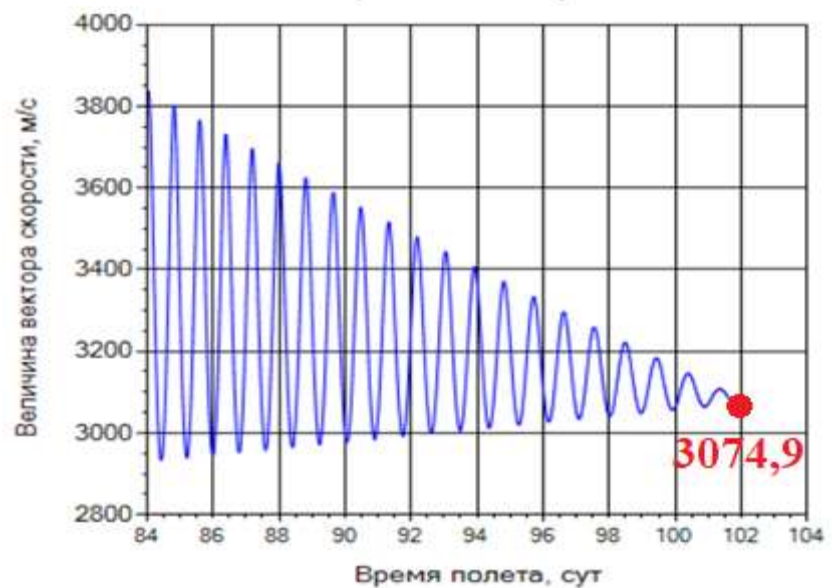
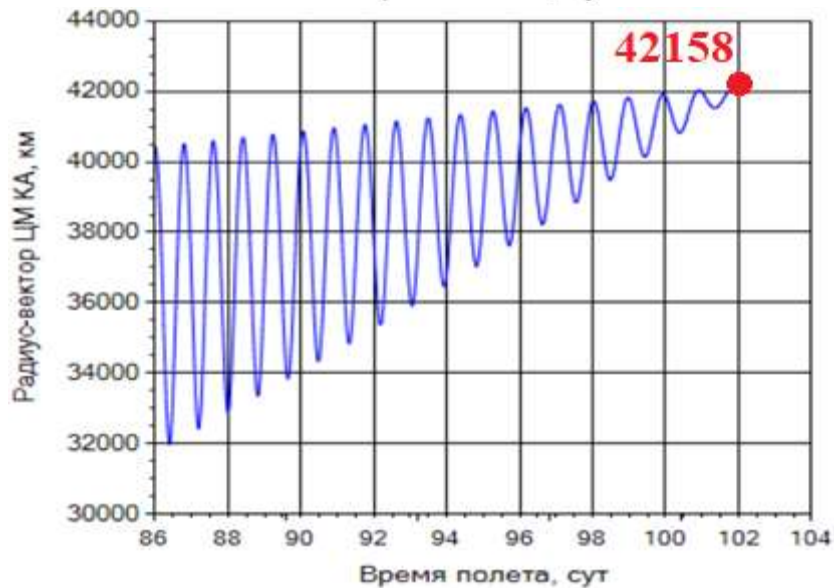
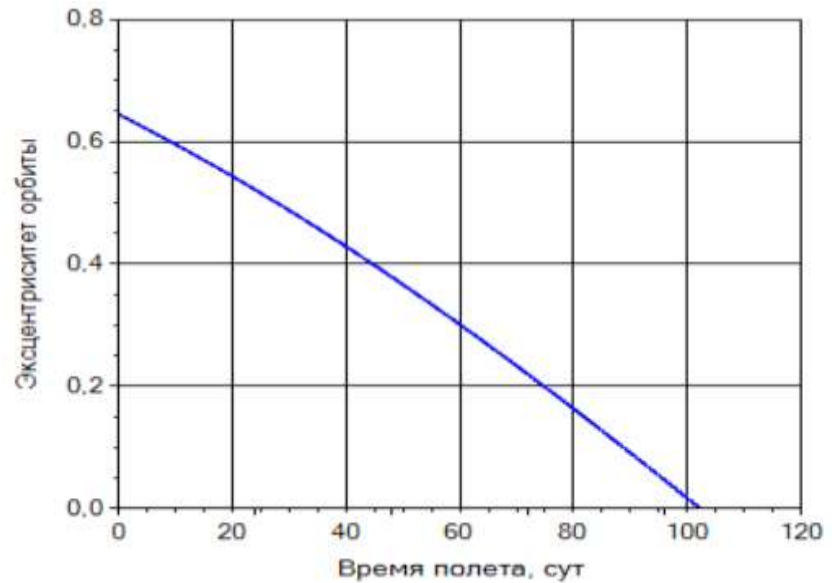
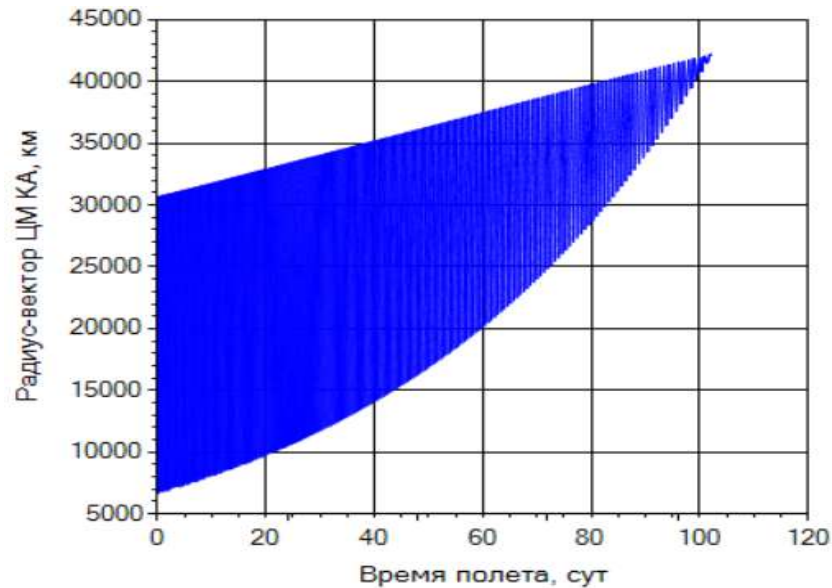
Номер итерации	Вектор невязок в лучшей вершине	Вектор невязок в промежуточной вершине	Вектор невязок в худшей вершине
Начальные значения	0,13594	0,195808	0,285393
1	0,031553	0,13594	0,195808
2	0,007463	0,031553	0,13594
3	0,001571	0,007463	0,031553



Зависимость параметров управления от времени полета



Зависимость параметров траектории от времени полета



Выводы

В результате работы над задачей компланарного перелета:

- Разработан алгоритм решения задачи оптимизации перелета на околокруговую орбиту двигателями малой тяги;
- Разработана программа расчета на языке C#;
- Проведена доработка программы, в результате которой время выполнения уменьшилось до 30 секунд;
- Выполнено тестирование разработанной программы.

Список литературных источников

1. Лебедев В.Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой – М. : Вычислительный центр АН СССР, 1968. – 107 с.
2. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация: Пер. с англ. – М. : Мир, 1985. – 509 с.

Приложение. Модифицированный метод Ньютона

P_{r0}, P_{u0} представляются как аргументы двух функций конечных значений:

$$f_{k1}(P_{r0}, P_{u0}) = v_k - v_k^{\text{орб}} = v_k - \sqrt{\frac{1}{r_k^{\text{орб}}}} = 0;$$

$$f_{k2}(P_{r0}, P_{u0}) = e_k = 0,$$

где $v_k^{\text{орб}}, r_k^{\text{орб}}$ – величина трансверсальной компоненты и радиус заданной орбиты соответственно;

e_k – эксцентриситет конечной орбиты:

$$e_k = \sqrt{(r_k v_k^2 - 1)^2 + (r_k u_k v_k)^2};$$

Итерационный процесс:

$$P_{r0}[i+1] = P_{r0}[i] + k \cdot \Delta P_{r0}[i];$$

$$P_{u0}[i+1] = P_{u0}[i] + k \cdot \Delta P_{u0}[i],$$

где i – номер итерации;

$\Delta P_{r0}[i], \Delta P_{u0}[i]$ – приращение соответствующего аргумента;

k – коэффициент для улучшения сходимости:

$$k[i+1] = \begin{cases} \frac{k[i]}{2} & \text{при } N[i+1] \geq N[i] \\ 2 \cdot k[i] & \text{при } N[i+1] < N[i]. \end{cases}$$

Приращения находятся решением системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{k1}}{\partial P_{r0}} & \frac{\partial f_{k1}}{\partial P_{u0}} \\ \frac{\partial f_{k2}}{\partial P_{r0}} & \frac{\partial f_{k2}}{\partial P_{u0}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta P_{r0}[i] \\ \Delta P_{u0}[i] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{k1} \\ -f_{k2} \end{bmatrix};$$

$$\Delta P_{r0}[i] = \frac{\Delta P_{r0}}{\Delta}, \Delta P_{u0}[i] = \frac{\Delta P_{u0}}{\Delta}.$$

Вектор невязок:

$$N = c \cdot |f_{k1}| + |f_{k2}| < \varepsilon,$$

где $c = 0,1$ – весовой коэффициент, ε – заданная точность.

Приложение. Симплекс-метод

Координаты середины отрезка:

$$P_r^c = \frac{P_r^l + P_r^m}{2}; \quad P_u^c = \frac{P_u^l + P_u^m}{2}.$$

Координаты отраженной точки:

$$P_{r0}^r = P_r^c + \alpha(P_r^c - P_r^h);$$

$$P_{u0}^r = P_u^c + \alpha(P_u^c - P_u^h).$$

Координаты точки после растяжения:

$$P_{r0}^e = P_r^c + \beta(P_r^r - P_r^c);$$

$$P_{u0}^e = P_u^c + \beta(P_u^r - P_u^c).$$

Координаты точки после сжатия к середине отрезка:

$$P_{r0}^{s1} = P_r^c + \gamma(\min(P_r^h; P_r^r) - P_r^c);$$

$$P_{u0}^{s1} = P_u^c + \gamma(\min(P_u^h; P_u^r) - P_u^c).$$

Координаты точки после сжатия к лучшей точке:

$$P_{r0}^{s2} = P_r^l + \gamma(P_r^h - P_r^l);$$

$$P_{u0}^{s2} = P_u^l + \gamma(P_u^h - P_u^l).$$

