



МГТУ имени Н.Э. Баумана
Всероссийская студенческая
конференция "Студенческая
научная весна", посвященной 170-
летию В.Г. Шухова



апрель 2023

**Уменьшение погрешности определения
логарифмического декремента по ширине
резонансного пика**

Руководитель: **Хамидуллин** Руслан Камильевич
Хрупа Станислав Константинович

Автор(ы): **Кондратьев** Евгений Константинович, АК1-81
Руднев Сергей Владимирович АК2-81

Москва, 2023

Цель работы

Определение погрешности при вычислении логарифмического декремента, с помощью резонансного пика и метода Йориша, а также уточнение формулы резонансного метода, путем добавления уточняющего коэффициента.

Задачи

- 1) Рассмотрение способов определения логарифмического декремента по АЧХ и ФЧХ;
- 2) Определение параметров влияющих на погрешность вычисления логарифмического декремента для каждого из методов;
- 3) Определение фактической погрешности вычисления логарифмического декремента по ширине резонансного пика в зависимости от параметров системы;
- 4) Получение формулы уточняющей вычисление логарифмического декремента по методу резонансного пика;
- 5) Сопоставление результатов определения логарифмического декремента различными способами.
- 6) Выдача рекомендаций по получению значений лог. декремента по экспериментальным данным АЧХ и ФЧХ.

Актуальность проблемы

Использование формул определения логарифмического декремента по резонансному пику может давать существенные погрешности, завышая фактические значения демпфирования. Это может привести к повышенным (нерассчетным) амплитудам колебаний ЛА, что может повлечь нарушение функционирования или разрушение конструкции.

Методы исследования

Математическое моделирование колебательной системы в программе «Wolfram Mathematica» и проверка полученной в ходе работы зависимости на экспериментальных данных.

Вывод формулы логарифмического декремента по пику

Рассмотрим колебания системы при вязком трении с гармоническим возбуждением:

$$x'' + 2nx' + p^2x = \frac{P_0}{m} \cos(\omega t) \quad (1)$$

Амплитудная частотная характеристика колебательной системы (1) имеет вид:

$$A(\omega) = \frac{P_0}{m \cdot \sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \quad (2)$$

Максимум АЧХ (2) достигается при коэффициентах расстройки:

$$\gamma_L = -\frac{\alpha}{2\sqrt{cm}} + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{4cm}} \text{ и } \gamma_R = \frac{\alpha}{2\sqrt{cm}} + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{4cm}} \quad (3)$$

Учтем малость слагаемого $\frac{\alpha^2}{4cm} \rightarrow 0$ в выражениях (3): $\gamma_L = -\frac{g}{2} + 1$ и $\gamma_R = \frac{g}{2} + 1$

$$A_L = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{g}{2}\right) \text{ и } A_R = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{g}{2}\right) \quad (4)$$

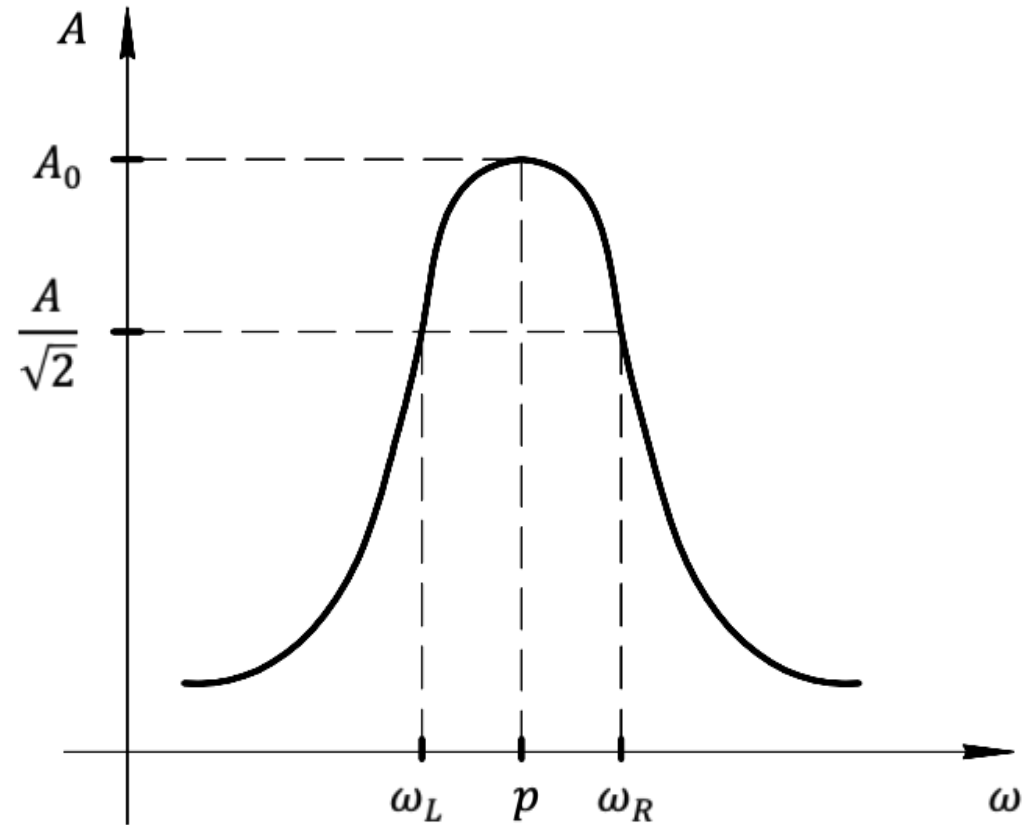
В силу слабого демпфирования ($\frac{g}{2} \rightarrow 0$),
выражения (4) принимают вид:

$$A_L \approx A_R \approx \frac{A_0}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

Вывод формулы логарифмического декремента по пику

$$\gamma_R - \gamma_L = \frac{\alpha}{\sqrt{cm}} = g \quad (6)$$

$$\delta = \frac{\pi(\omega_R - \omega_L)}{p} \quad (7)$$



Математическая модель

$$x'' + 2nx' + p^2x = \frac{P_0}{m} \cos(\omega t)$$

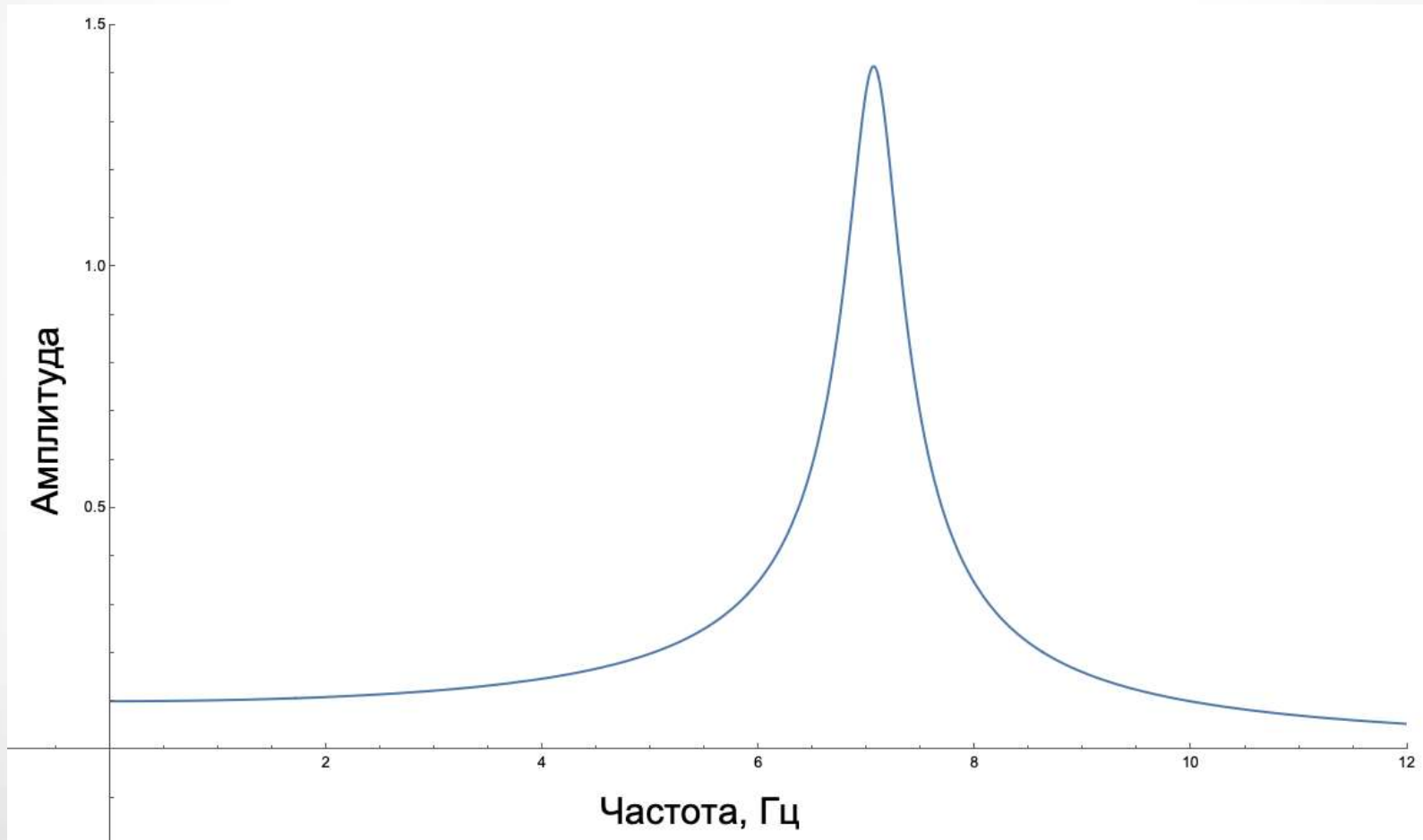
Из вывода формулы логарифмического декремента видим, что основной вклад в погрешность создают такие параметры, как собственная частота p и коэффициент демпфирования α :

$$p = \text{var}; \quad p \in [0, 600]$$

$$\alpha = \text{var}; \quad \alpha \in [0, 1]$$

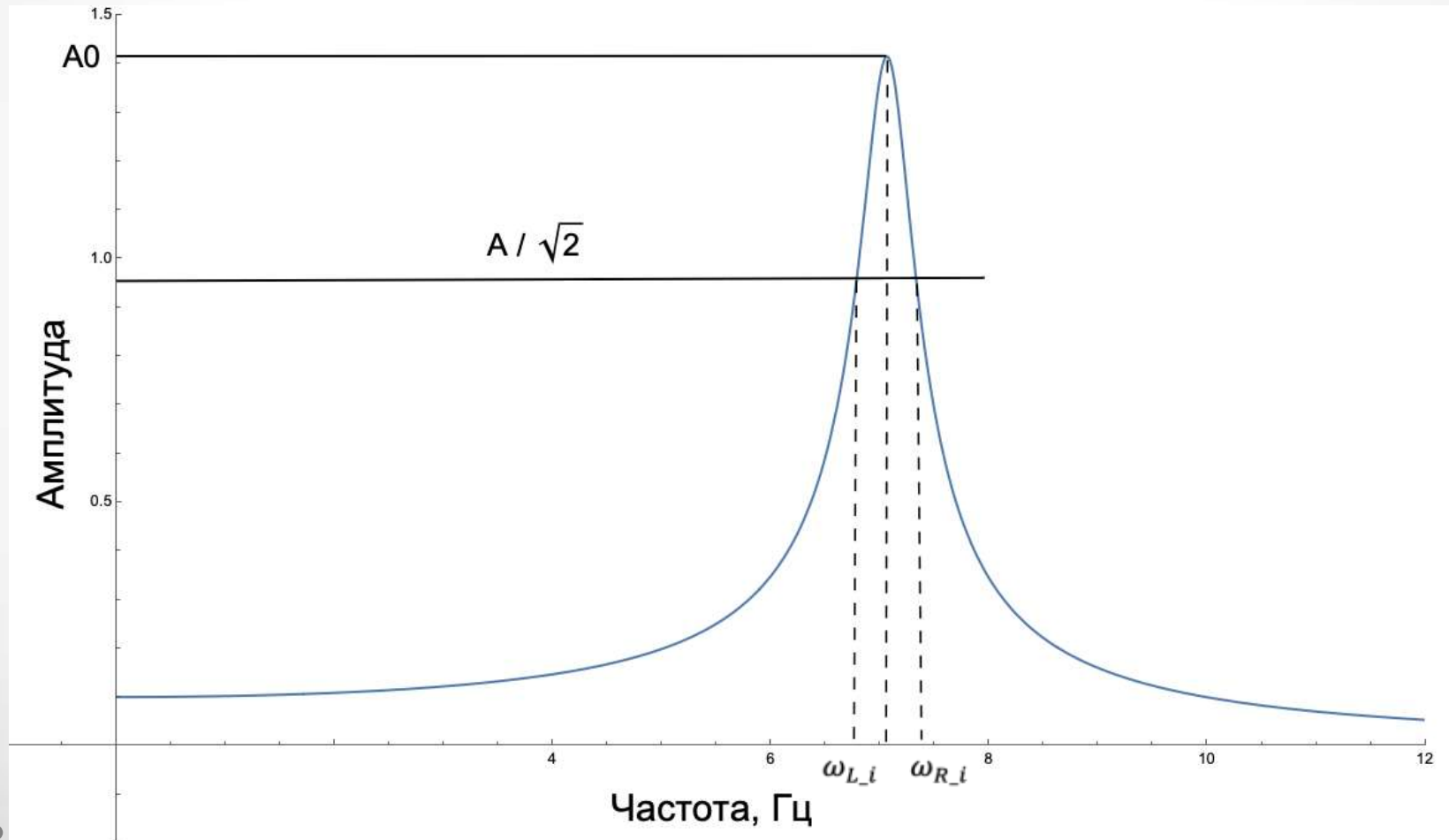
Математическая модель

1) АЧХ колебательной системы при фиксированном значении p и α ;



Математическая модель

2) Методом резонансного пика из АЧХ определяется логарифмический декремент по формуле: $\delta_{r_i} = \frac{\pi(\omega_{R_i} - \omega_{L_i})}{p_i}$



Математическая модель

3) Теоретическое значение логарифмического

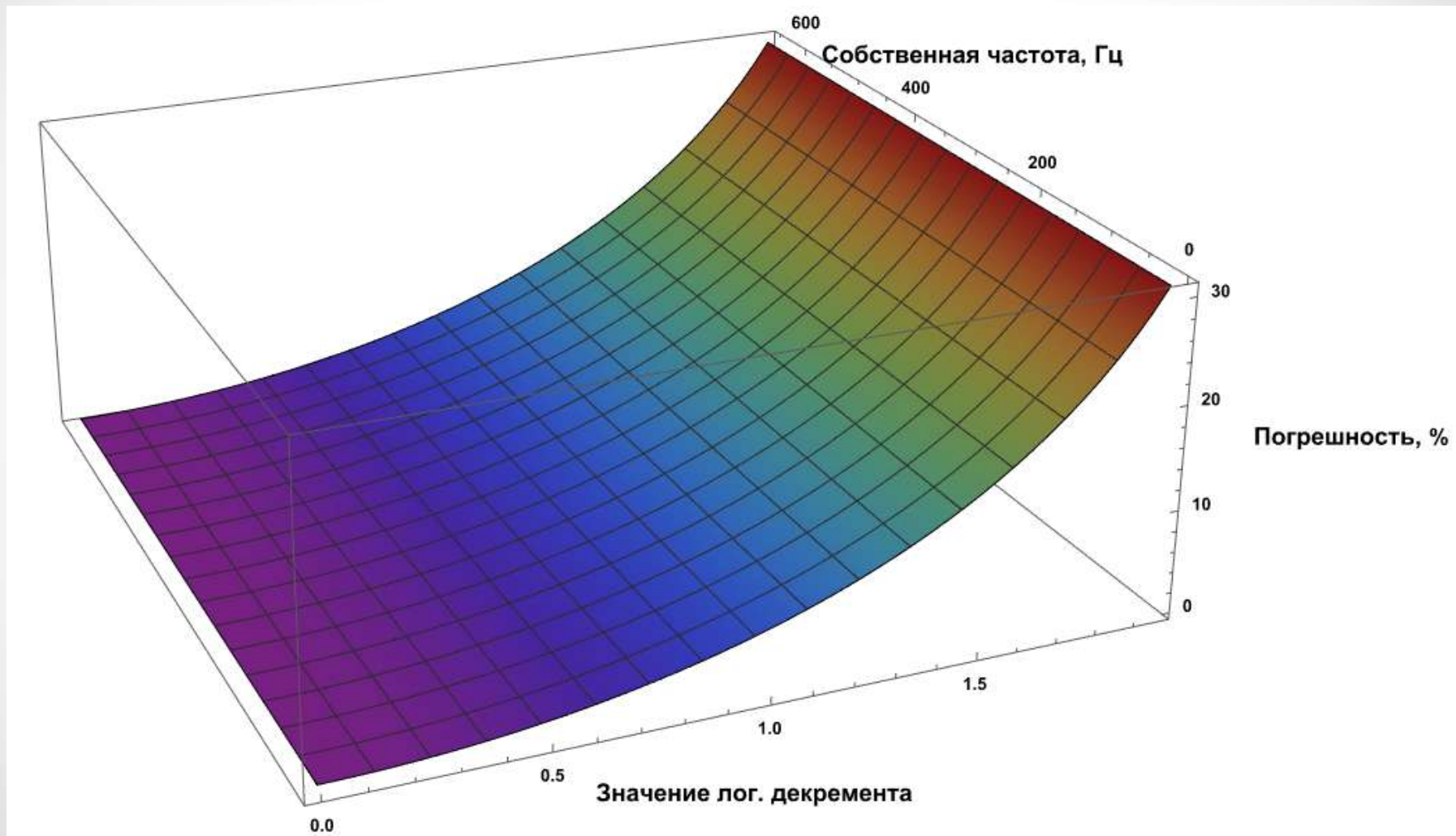
декремента по зависимости: $\delta_i = \pi \cdot \frac{\alpha_i}{\sqrt{c_i m_i}}$

4) Погрешность между истинным значением

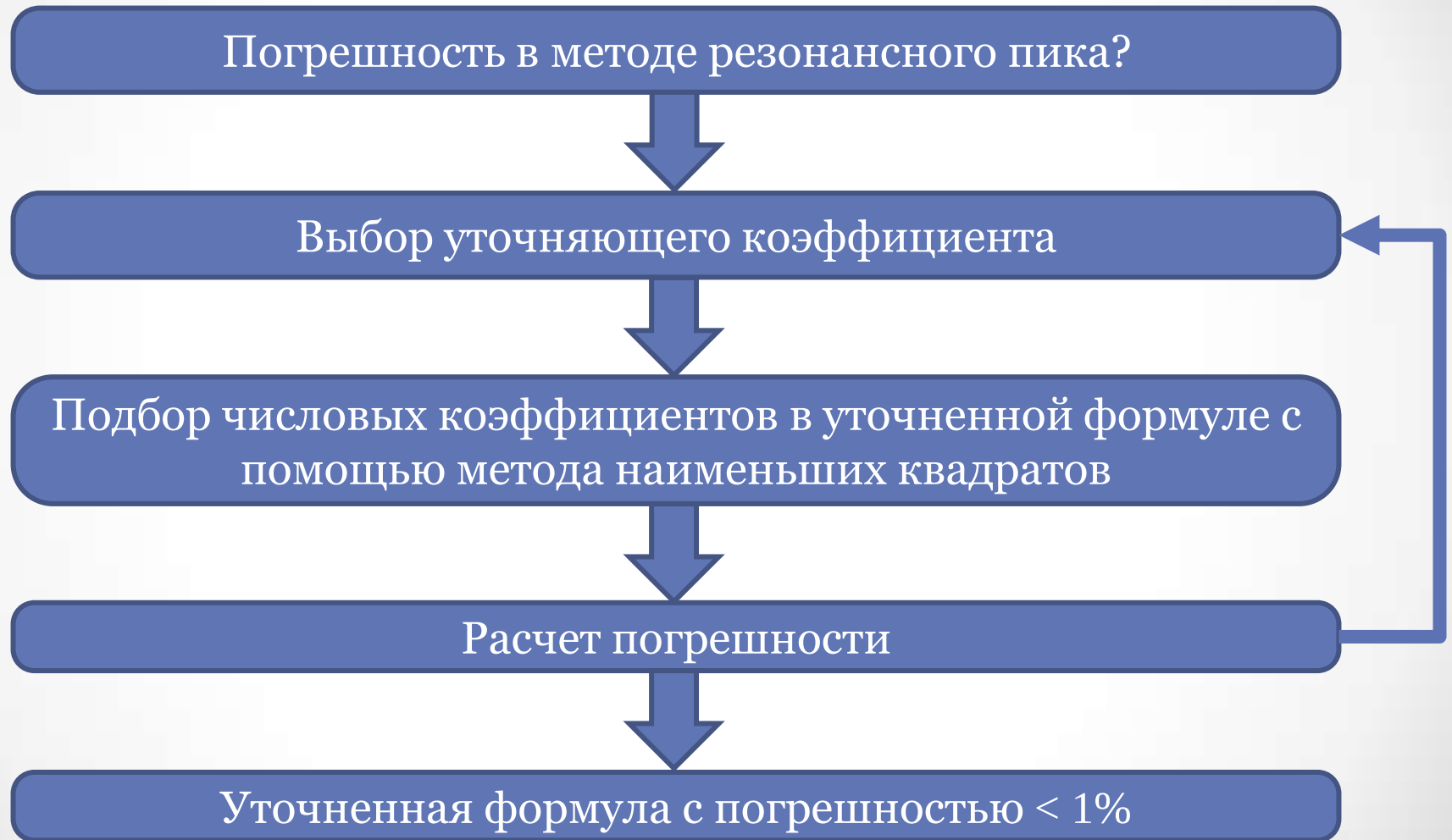
логарифмического декремента и расчетным, при помощи метода резонансного пика:

$$\Delta = \frac{|\delta_i - \delta_{r_i}|}{\delta_i} \cdot 100\%$$

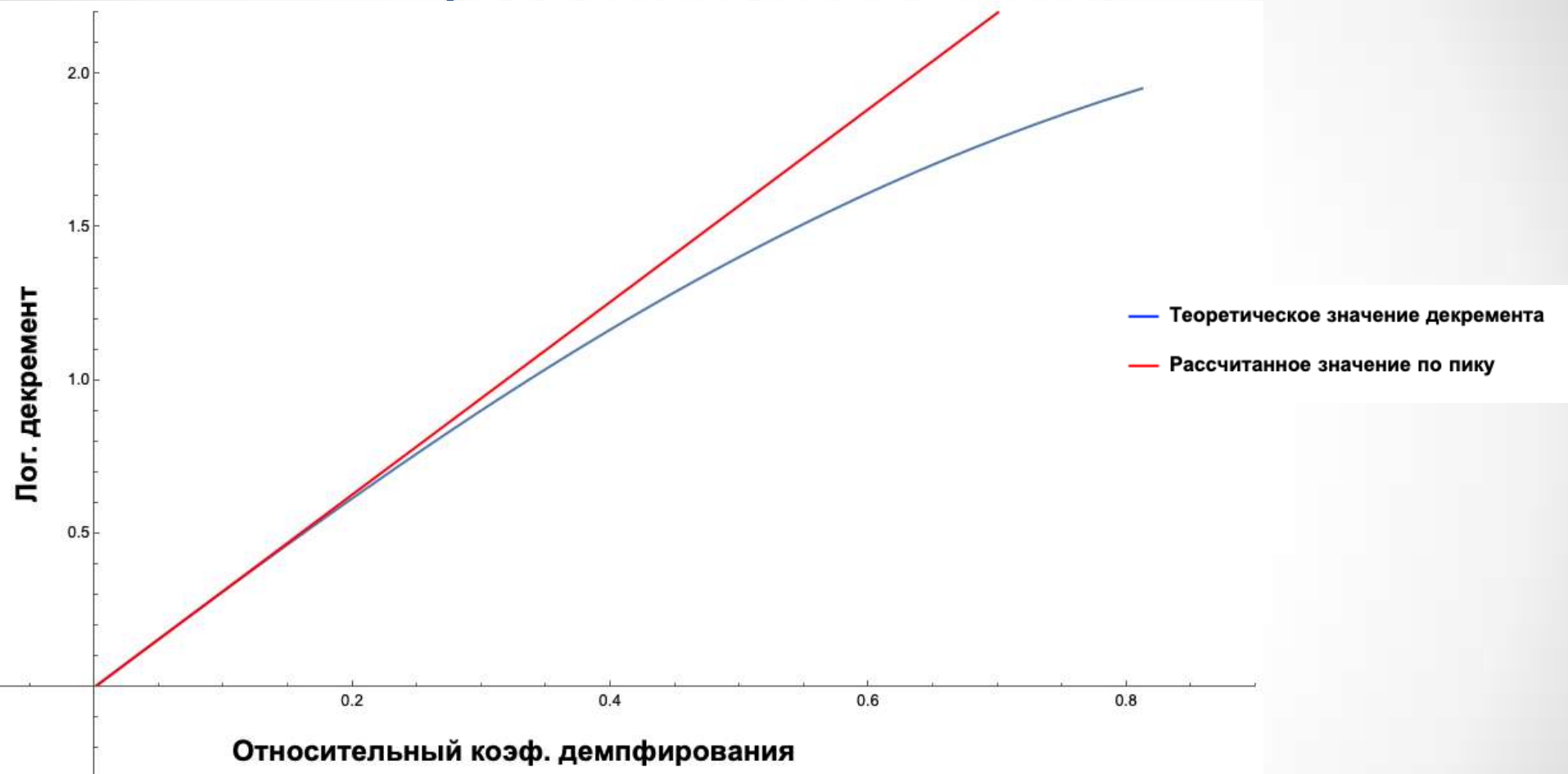
Анализ погрешности метода резонансного пика



Алгоритм определения уточненной формулы



Проявление погрешности в методе резонансного пика

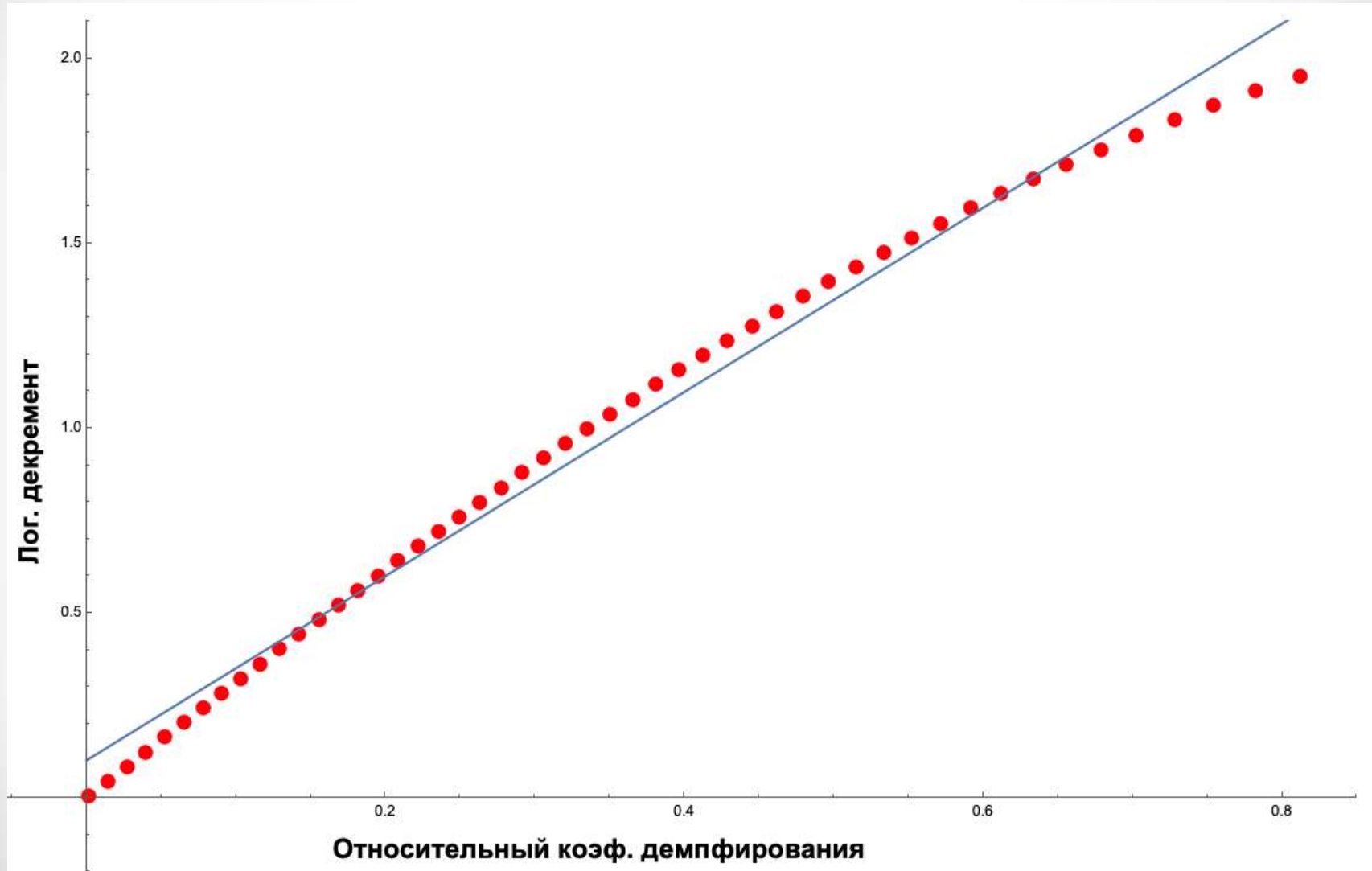


$$\gamma_R - \gamma_L = \frac{\alpha}{\sqrt{cm}} = g \quad (6)$$

$$\delta = \frac{\pi(\omega_R - \omega_L)}{p} \quad (7)$$

Использование линейного коэффициента

$$\delta = 0,1014 + 2,491 \cdot g$$



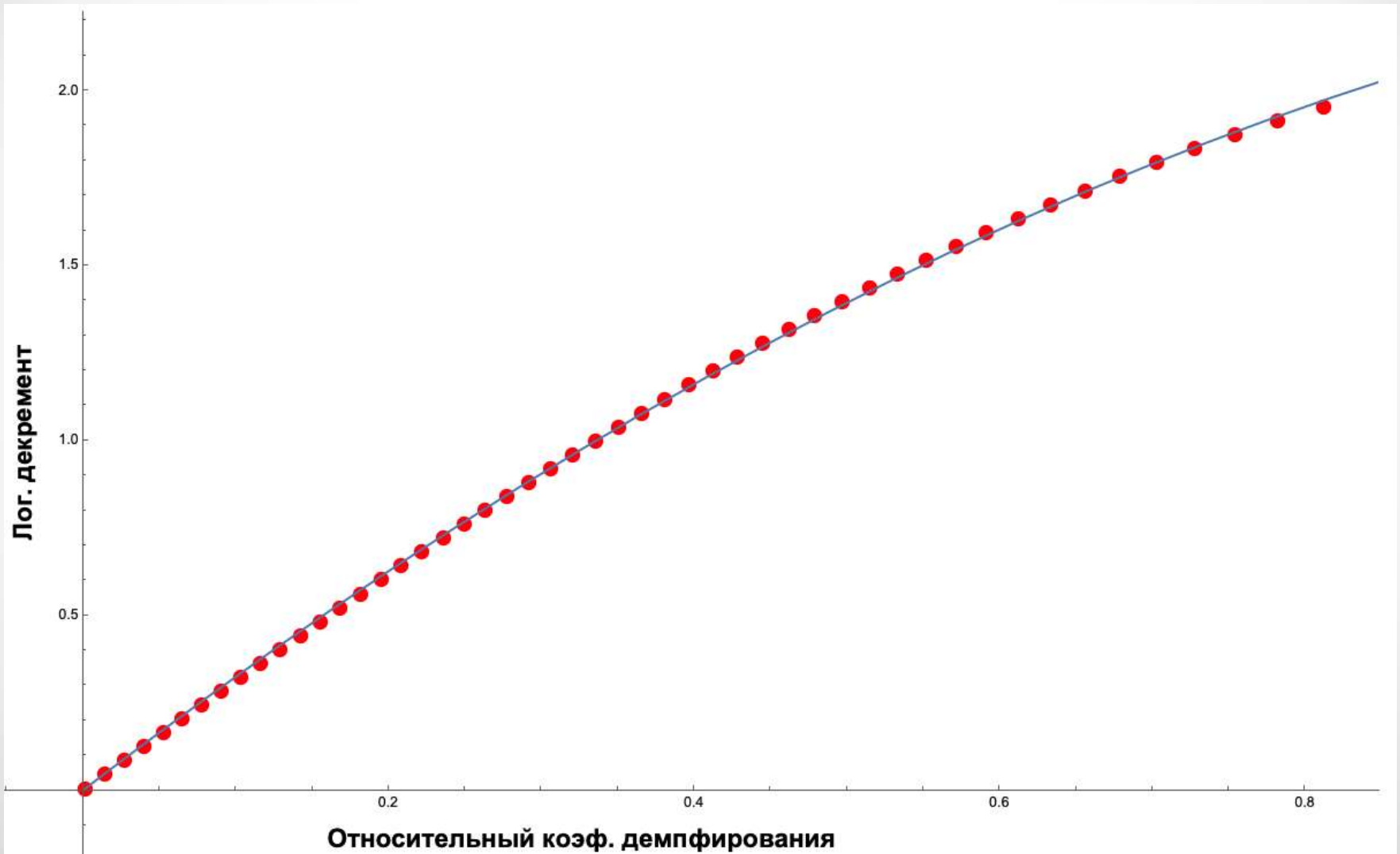
Использование линейного коэффициента

$$\delta = 0,1014 + 2,491 \cdot g$$



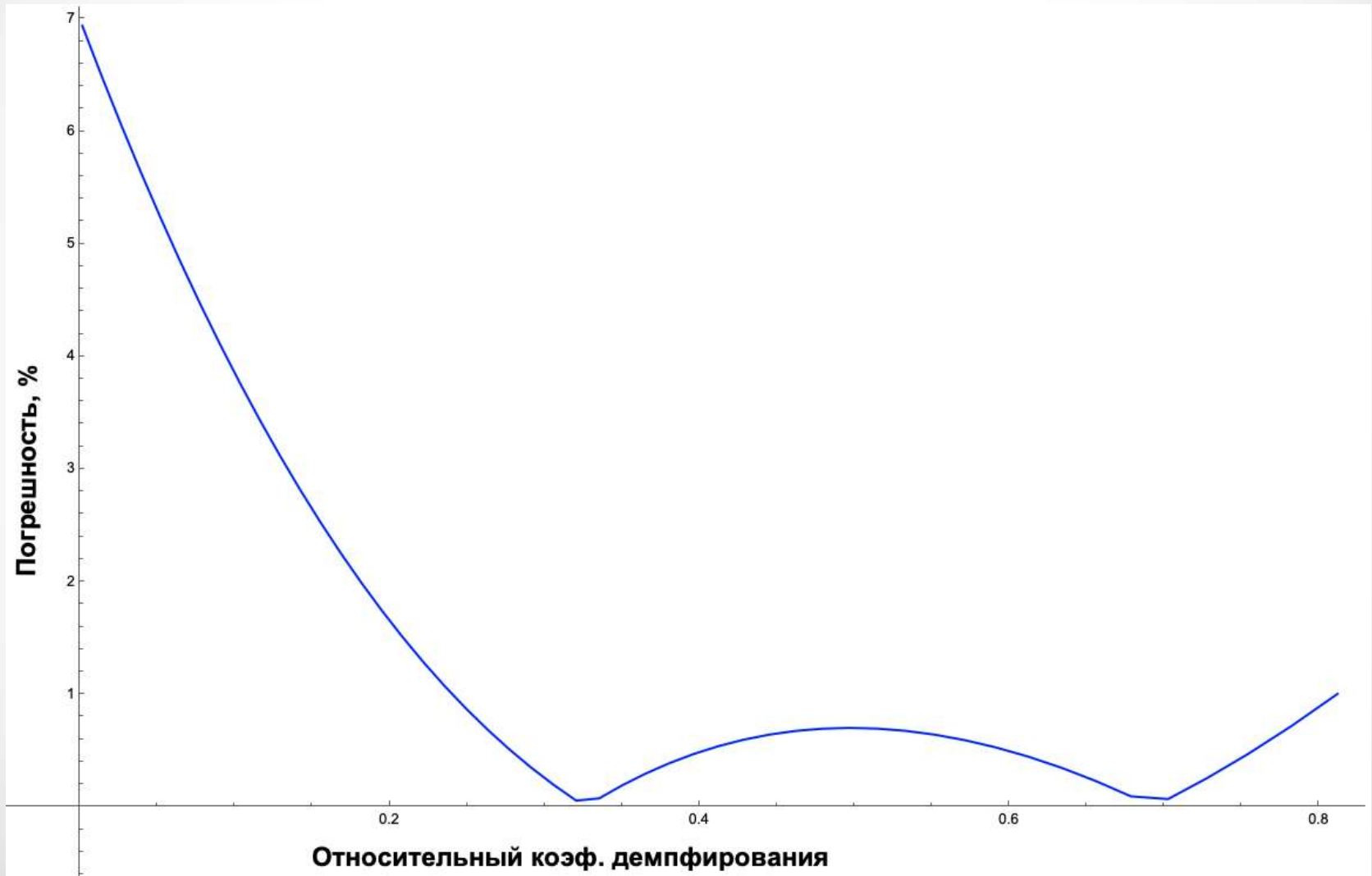
Использование квадратичного коэффициента

$$\delta = 3,361 \cdot g - 1,149 \cdot g^2$$



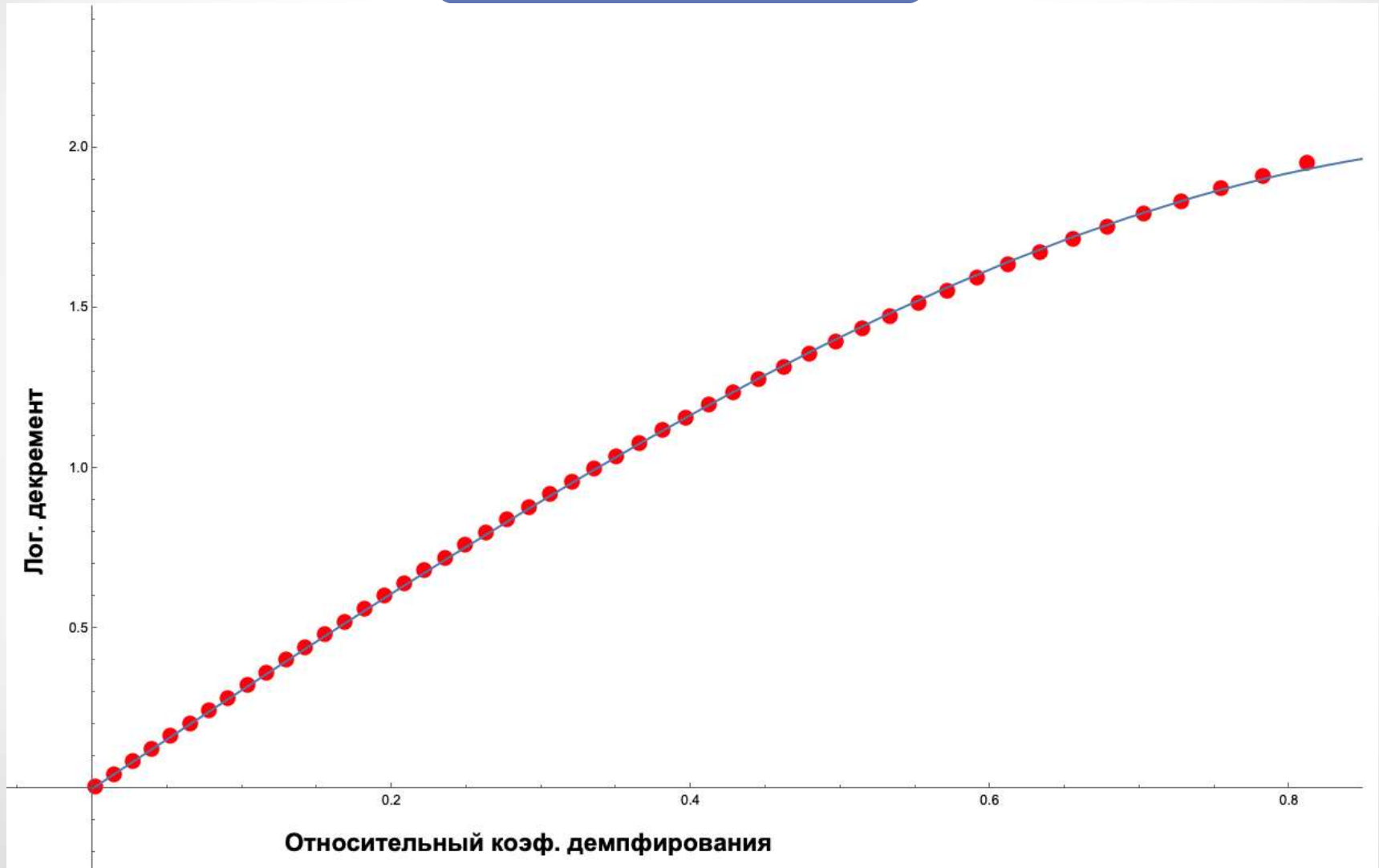
Использование квадратичного коэффициента

$$\delta = 3,361 \cdot g - 1,149 \cdot g^2$$



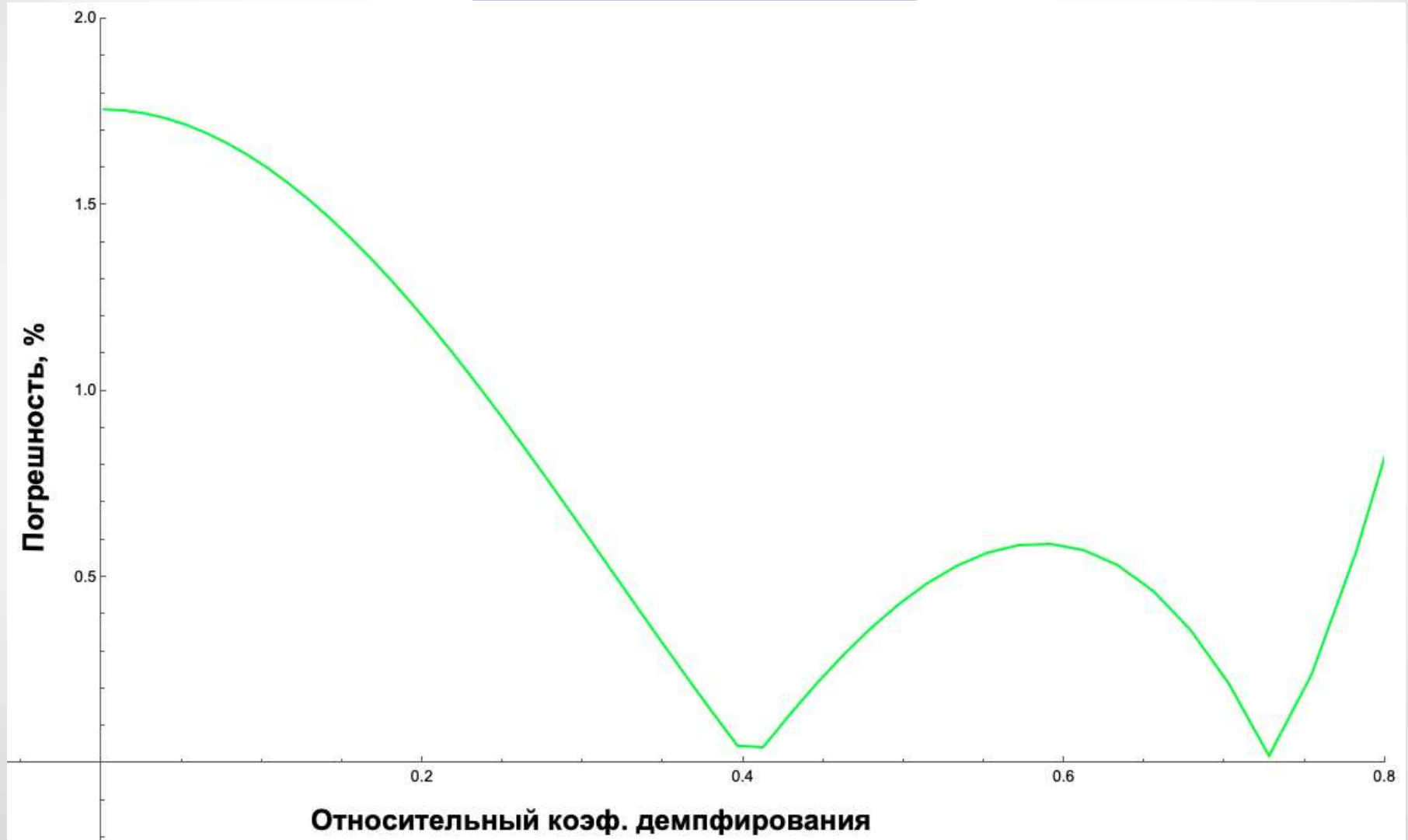
Использование кубического коэффициента

$$\delta = 3,086 \cdot g - 1,071 \cdot g^3$$



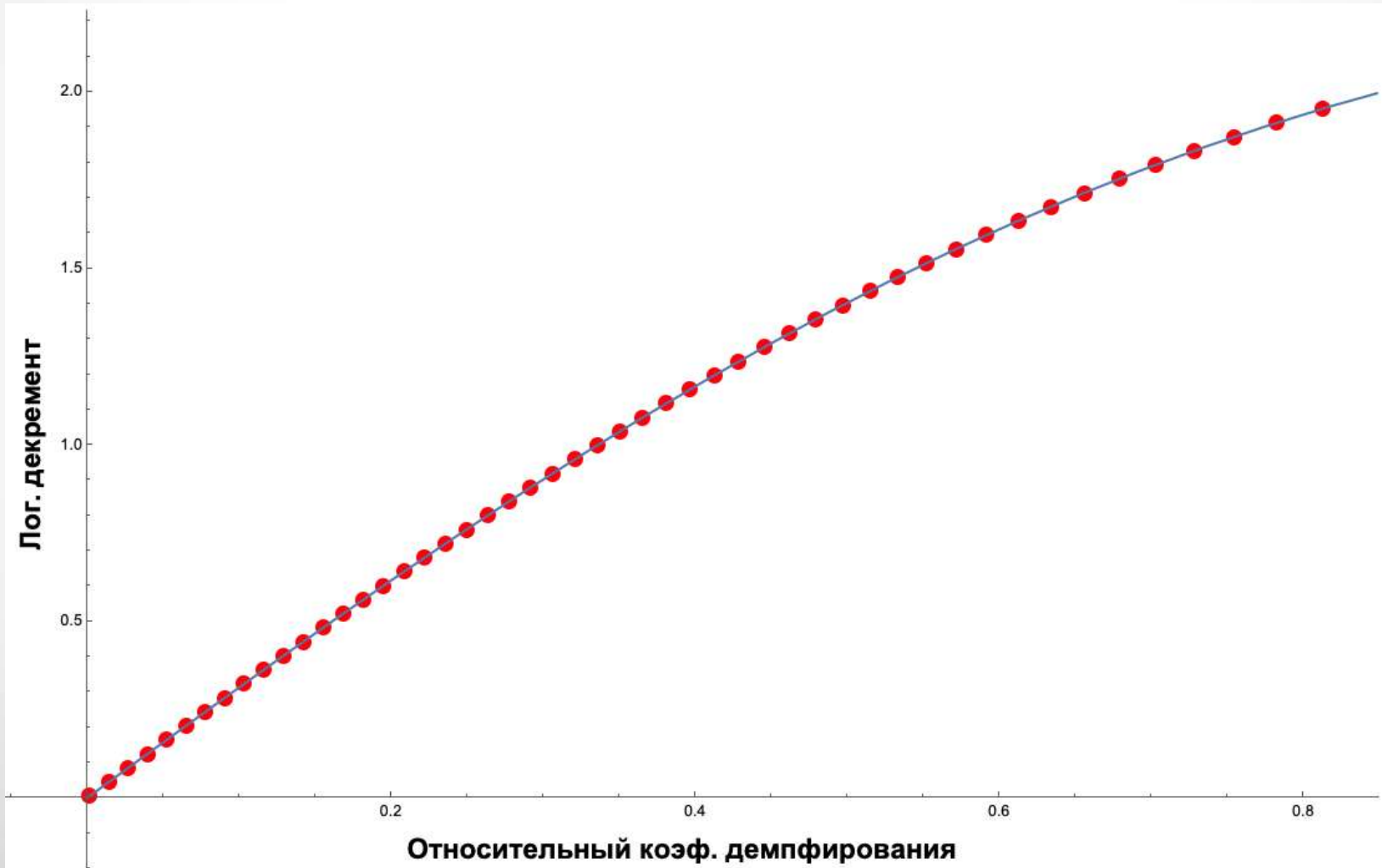
Использование кубического коэффициента

$$\delta = 3,086 \cdot g - 1,071 \cdot g^3$$



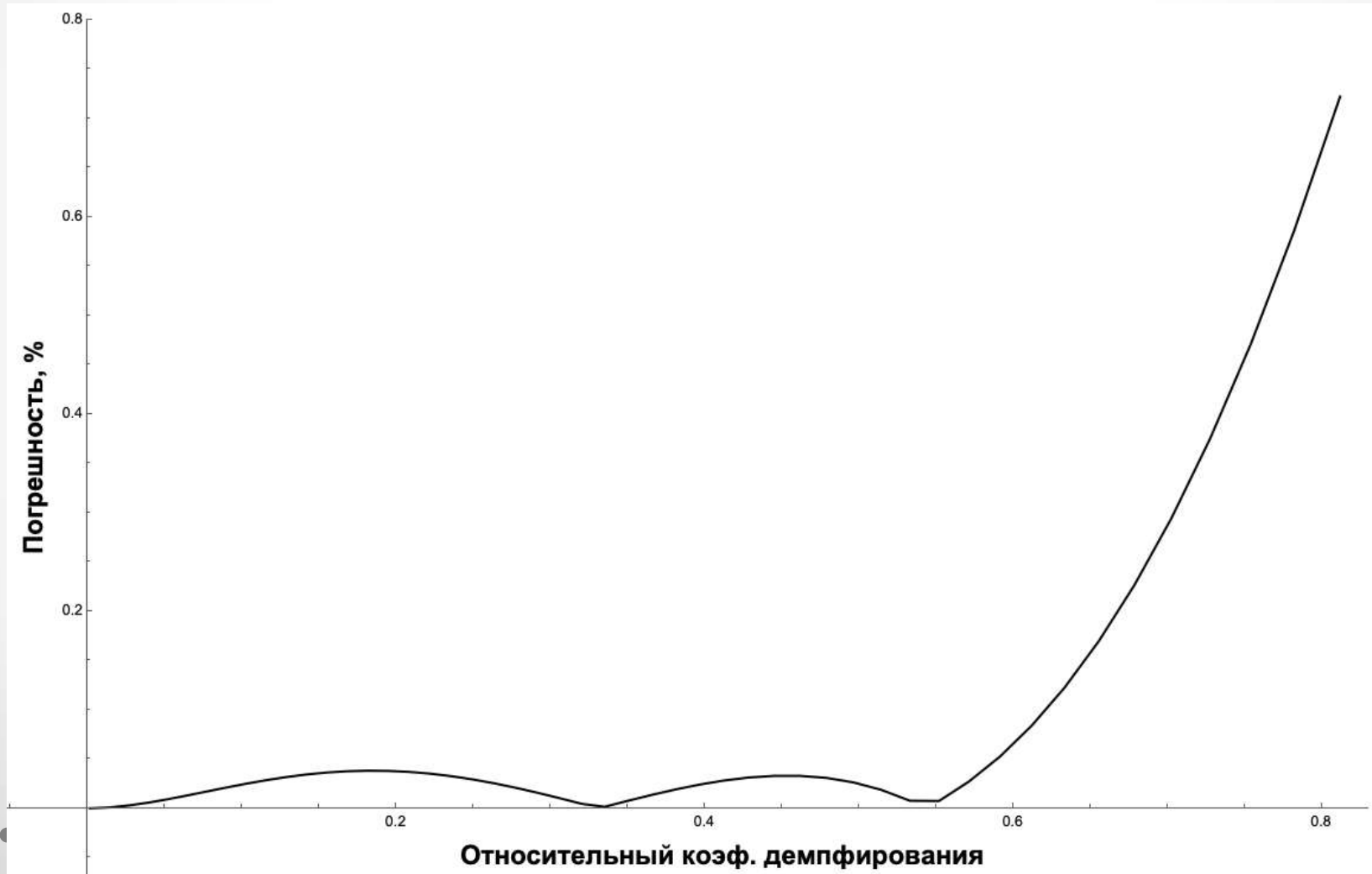
Использование кубического коэффициента с экспонентой

$$\delta = \pi \cdot g - (e - 1) \cdot e^{-\frac{g^2}{2}} \cdot g^3$$

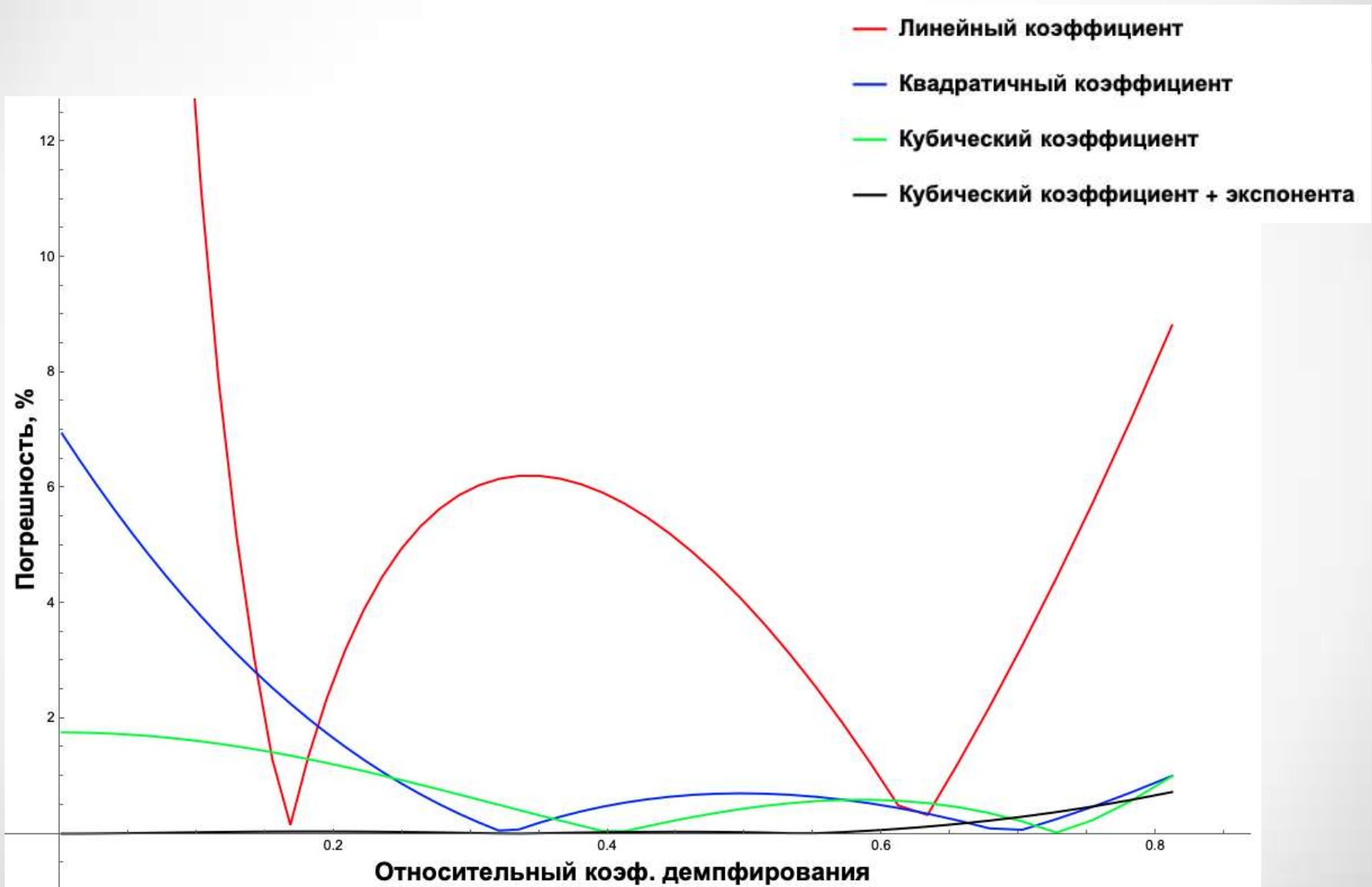


Использование кубического коэффициента с экспонентой

$$\delta = \pi \cdot g - (e - 1) \cdot e^{-\frac{g^2}{2}} \cdot g^3$$

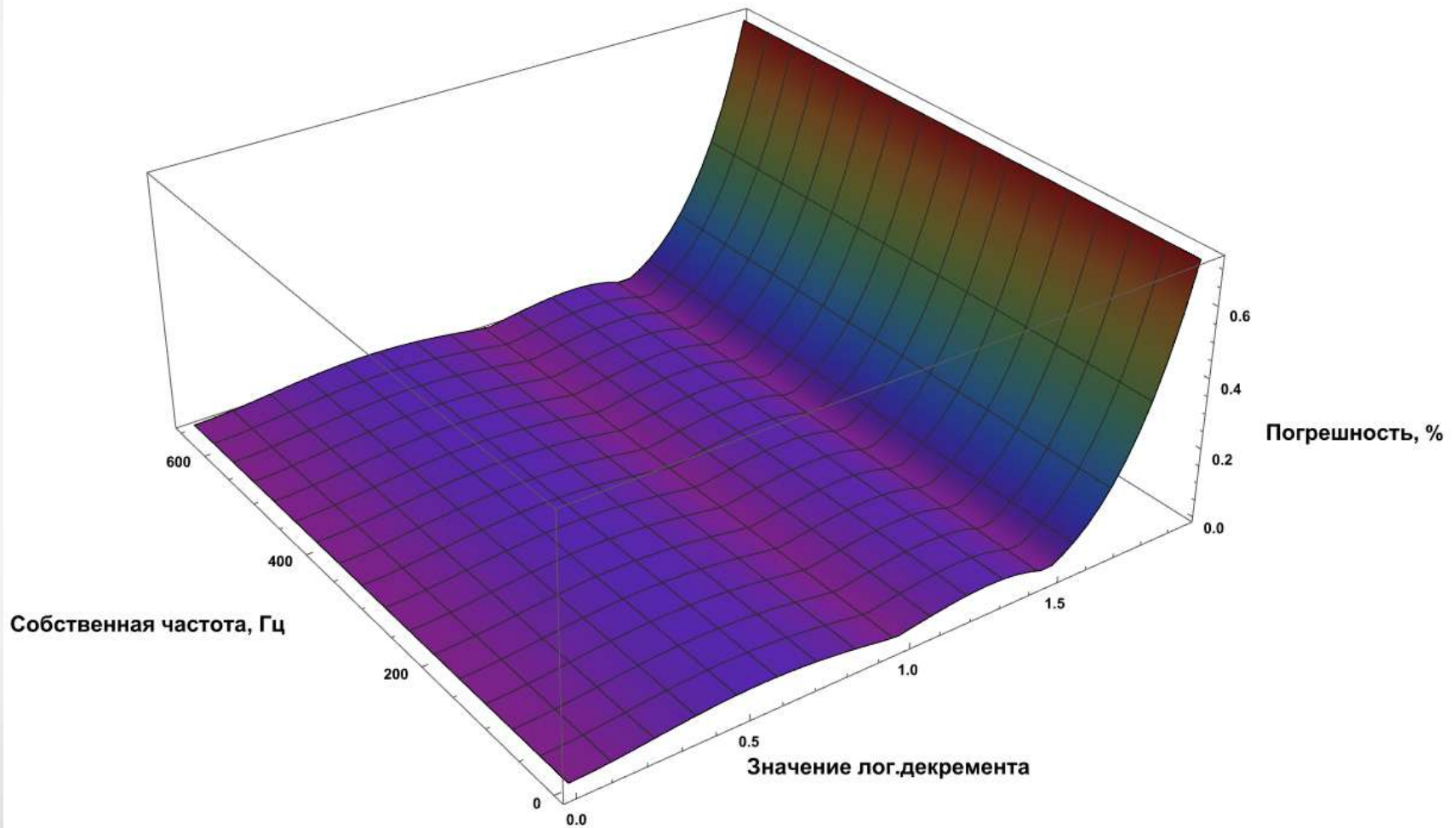


Сравнение различных формул



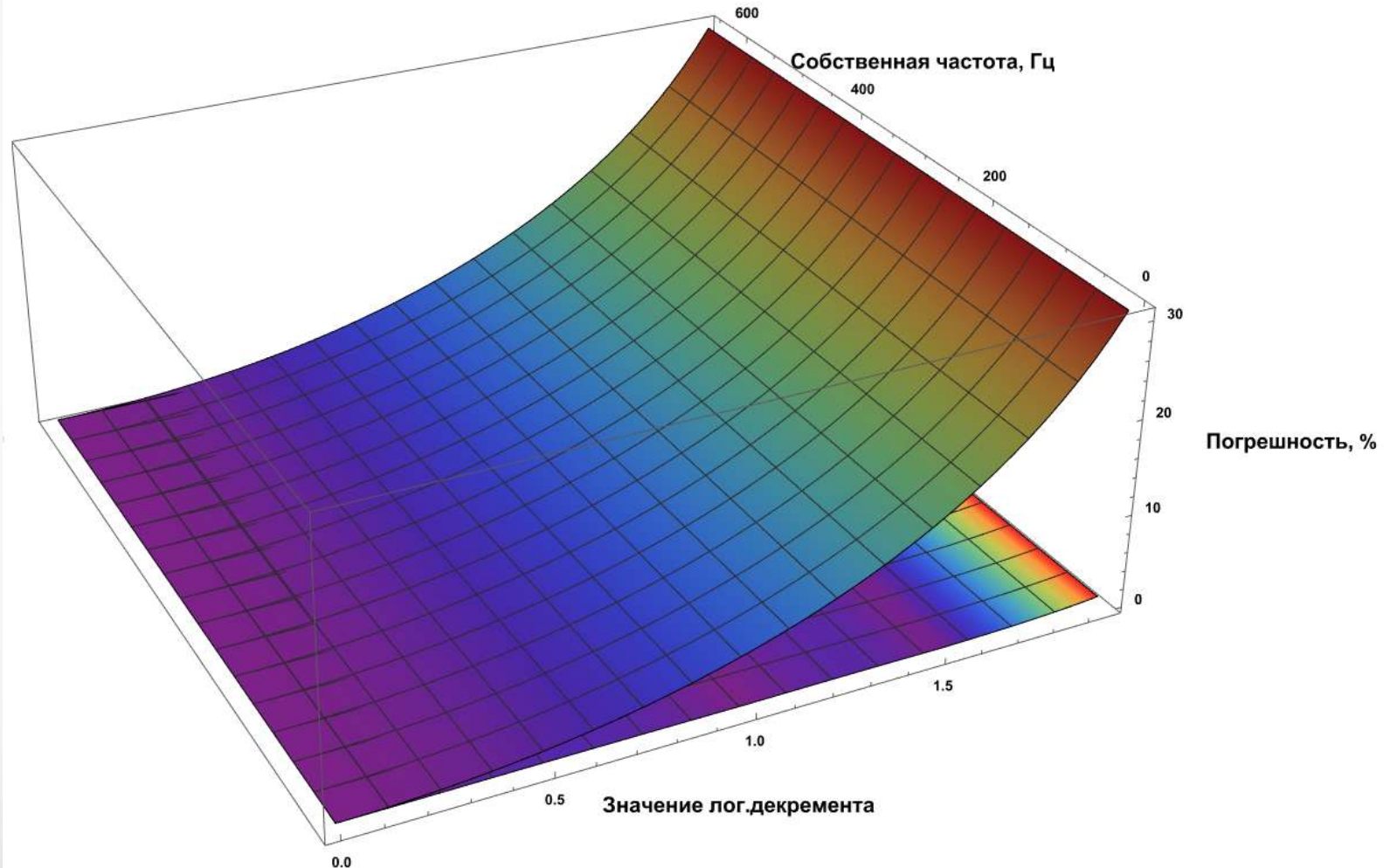
Анализ погрешности уточненной функции

$$\delta = \pi \cdot g - (e - 1) \cdot e^{-\frac{g^2}{2}} \cdot g^3$$



Сравнение с исходной формулой

$$\delta = \pi \cdot g - (e - 1) \cdot e^{-\frac{g^2}{2}} \cdot g^3$$



Вывод формулы Иорвиша

Вывод формулы

Исходное уравнение

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

Ищем решение в виде

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

После подстановки получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (A\omega_0^2 - A\omega^2) \cos(\varphi) - 2\beta A\omega \sin(\varphi) = f_0 \\ -(A\omega_0^2 - A\omega^2) \sin(\varphi) - 2\beta A\omega \cos(\varphi) = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения выводим

$$\beta = -\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega} \operatorname{tg}(\varphi)$$

Границы применения

В книге “Виброметрия” нахождения коэффициента демпфирования лучше всего осуществляется при фазе 45 градусов. Из анализа экспериментальных данных, можно сделать заключение, что при малых и средних значениях декремента и отклонении фазы на ± 15 и ± 10 , соответственно, формула дает погрешность не более 5 %. Однако при больших значениях погрешность не превышает 5 % только при 45 градусах.

Сравнение результатов обработки экспериментальных данных

Диапазоны демпфирования	Значения логарифмического декремента		
	Метод пика	Уточненная формула	Метод Иорвиша
При малом демпфировании	0,0036	0,0036	0,0039
При среднем демпфировании	0,1456	0,1454	0,1545
При большом демпфировании	0,5293	0,5217	0,3577

Выводы

- 1) В результате работы была получена уточненная формула, снижающая погрешность определения логарифмического декремента до 1% на диапазоне демпфирования от 0 до 2.
- 2) Метод пика имеет значения погрешности менее 5% на диапазоне демпфирования от 0 до 1.
- 3) Метод Иориша имеет значение погрешности менее 10% на диапазоне демпфирования от 0 до 0.2.